MAR

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

K. Hensel und H. Hasse

Band 172

Heft 4

Ausgegeben den 6. Februar 1935

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

Berlin W 10 und Leipzig

1935

Band 172. Heft 4.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Plamitzer, Anton, Über Flächen $(2n+1)$. Ordnung mit einer n-fachen kubischen Raumkurve	193
Petterson, Erik L., Über einen Satz von Ö. Ore	217
Brendel, Martin, Über eine neue Methode zur Ermittlung der Planetenstörungen	219
Deuring, Max, Zetafunktionen quadratischer Formen	226

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgendeinem Grunde Text-Änderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 75 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion ausschließlich unter der Adresse:
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg-Lahn, Behringweg 7.

Druck von Walter de Gruyter & Co., Berlin W 10
Printed in Germany

Über Flächen $(2n+1)$. Ordnung mit einer n-fachen kubischen Raumkurve.

Von *Anton Plamitzer* in Lwów (Polen).

Das vortreffliche Werk von Luigi Berzolari enthält [1]) u. a. ausführliche Literaturangaben über Oberflächen, die sich als Erzeugnisse einer Klasse Cremonascher Verwandtschaften zwischen Grundgebilden zweiter Stufe erhalten lassen. Besteht zwischen zwei gegebenen Ebenenbündeln (W_1) und (W_2) eine Cremonasche Korrespondenz n. Grades $(W_1)\pi^n(W_2)$, so erzeugen bekanntlich die Schnittgeraden homologer Ebenen eine Kongruenz n. Ordnung und $(n+2)$. Klasse K. Befinden sich zwei gegebene Ebenenbündel (W_1) und (W) in einer Cremonaschen Verwandtschaft m. Grades $(W_1)\pi^m(W)$, so ergibt sich [2]) sofort eine eineindeutige Korrespondenz zwischen den Geraden der Kongruenz K und den Ebenen des Bündels (W). Existieren im Bündel (W_1) unter seinen r-fachen Fundamentalebenen der Cremonaschen Verwandtschaft m. Grades α_{rs} Ebenen derart, daß jede von ihnen eine s-fache Hauptebene der Cremonaschen Korrespondenz n. Grades ist, so ergibt sich [3]) zwischen den Ebenenbündeln (W_2) und (W) eine Cremonasche Verwandtschaft M. Grades mit $M = mn - \Sigma rs\alpha_{rs}$, $r = 1, 2, \ldots, m-1$, $s = 1, 2, \ldots, n-1$. Diese drei Ebenenbündel (W_1), (W_2) und (W) erzeugen [4]) als Ort der Schnittpunkte der homologen Ebenen eine Fläche von der Ordnung $mn + m + n - \Sigma rs\alpha_{rs}$. Diese Fläche, in deren Punkten homologe Elemente der Kongruenz K und des Bündels (W) sich schneiden, besitzt in den Scheiteln W_1, W_2, W der betrachteten Bündel vielfache Punkte, deren Multiplizitäten resp. $mn - \Sigma rs\alpha_{rs}$, m, n sind. G. Jung legt noch einige Beziehungen dar, welche zwischen dieser Fläche und den Hauptebenen der betrachteten Verwandtschaften bestehen. Er erforscht auch einige Spezialfälle von diesen Oberflächen. Insbesondere für $n = 1$ ist $s = 0$, $M = m$, und die Fläche $(2m+1)$. Ordnung besitzt eine m-fache kubische Raumkurve, in deren Punkten je zwei homologe Geraden der kollinearen Bündel (W_1) und (W_2) sich schneiden. — Ist $n = m$ und ist außerdem im Ebenenbündel (W_1) jede r-fache Hauptebene der Cremonaschen Verwandtschaft m. Grades zugleich eine r-fache Hauptebene der Verwandtschaft n. Grades, so ergibt sich eine Fläche $(2m+1)$. Ordnung mit einer m-fachen kubischen Raumkurve, in deren Punkten homologe Geraden der kollinearen Bündel (W) und (W_2) sich schneiden.

---

[1]) L. Berzolari, Algebraische Transformationen und Korrespondenzen, Encyklop. d. math. Wissensch. Bd. III, 2, Heft 12, Nr. 103.

[2]) G. Jung, Sui sistemi Cremoniani reciproci di grado m. Nota III, Rendiconti della reale Accademia dei Lincei (4) **1** (1885), p. 810—812.

[3]) G. Jung, Sulle trasformazioni birazionali di tre forme geometriche di seconda specie, Rendiconti del r. Istituto di scienze e lettere Milano (2) **19** (1886), p. 161—166.

[4]) G. Jung, Sulle superficie generate da tre sistemi deducibili l'uno dall' altro mediante trasformazioni birazionali, Rend. Acc. Linc. (4) **2** sem. 1 (1886), p. 85—89.

Sind Cremonasche Korrespondenzen $(W_1)\pi^n(W_2)$ und $(W_1)\pi^m(W)$ so gegeben, daß in jedem von diesen drei Ebenenbündeln keine Hauptebene der einen Korrespondenz mit einer Hauptebene der zweiten Korrespondenz zusammenfallen kann, so erzeugen [5]) diese Bündel eine Fläche Ψ_1 von der Ordnung $(m+1)(n+1)-1$. Zwischen den Geraden der Kongruenz K und den Ebenen des Bündels (W) besteht eine eineindeutige Verwandtschaft $m(n+1)$. Grades. Homologe Elemente dieser Gebilde schneiden sich in Punkten der betrachteten Fläche Ψ_1. In den Bündeln (W_1) und (W_2) bezeichnen wir mit α_1 resp. β_2 die Hauptebenen der Cremonaschen Korrespondenz n. Grades, und in den Bündeln (W_1), (W) mit γ_1 resp. δ die Hauptebenen der Verwandtschaft m. Grades. Die Ebenen des Bündels (W_1), welche einer r'-fachen Hauptebene β_2 entsprechen, umhüllen eine Kegelfläche r'. Klasse; homologe Ebenen des Bündels (W) umhüllen eine Kegelfläche mr'. Klasse. Diese r'-fache Hauptebene β_2 schneidet die durch erhaltene Kegelflächen erzeugte Regelfläche in einer Kurve $r'(m+1)$. Ordnung, welche der betrachteten Fläche Ψ_1 angehört. Jede s'-fache Hauptebene δ schneidet die ihr in der Kongruenz K zugeordnete Regelfläche in einer Kurve $s'(n+1)$. Ordnung, welche der Fläche Ψ_1 angehört. Entspricht jeder r-fachen Hauptebene α_1 im Bündel (W) eine Ebene α und jeder s-fachen Hauptebene γ_1 eine Ebene γ_2 im Bündel (W_2), so bilden die Schnittgeraden $\alpha_1\alpha$ resp. $\gamma_1\gamma_2$ eine r-fache bzw. s-fache Gerade der Oberfläche Ψ_1. Sie besitzt noch $(m+1)(n+1)+2$ einfache Geraden, von denen jede der Schnitt dreier homologen Ebenen der gegebenen Ebenenbündel ist. Die Oberfläche Ψ_1, welche in den Scheiteln W_1, W_2 und W dieser Bündel resp. mn-, m-, n-fache Punkte besitzt, läßt sich leicht eineindeutig auf eine zum Bündel (W_1) reziproke Ebene ε abbilden. Vermittelst dieser Abbildung bestimmt P. Visalli die Ordnung $\frac{1}{2}(mn-1)(mn+2m+2n-2)$ der Doppelkurve der Oberfläche Ψ_1.

Drei Ebenenbündel, die sich in Cremonaschen Verwandtschaften von den Graden n_1, n_2, n_3 mit einem Ebenenbündel (W) befinden, erzeugen [6]) als Ort der Schnitte der homologen Ebenen eine Fläche $(n_1n_2+n_2n_3+n_3n_1)$. Ordnung, welche in den Scheiteln der drei Bündel resp. n_2n_3-, n_3n_1-, n_1n_2-fache Punkte besitzt. Diese Fläche enthält $n_1n_2+n_2n_3+n_3n_1+3$ nicht durch diese Scheitelpunkte gehende Geraden und läßt sich leicht auf die Ebene ε, die korrelativ zum Bündel (W) ist, abbilden. Vermittelst dieser Abbildung kann man [7]) die Ordnung

$$\tfrac{1}{2}(n_1n_2+n_2n_3+n_3n_1-2)(n_1n_2+n_2n_3+n_3n_1-3)$$

der Doppelkurve dieser Fläche bestimmen.

In der vorliegenden Abhandlung stelle ich zwischen einem gegebenen Ebenenbündel (W_0) und jedem von zwei gegebenen kollinearen Ebenenbündeln (W_1), (W_2) — deren Scheitelpunkte beliebig und voneinander verschieden sind — allgemeine Cremonasche Verwandtschaften n. Grades her. Diese drei Ebenenbündel erzeugen als Ort der Schnitte der homologen Ebenen eine Oberfläche $(2n+1)$. Ordnung Ψ mit einer n-fachen kubischen Raumkurve S^3_{12}, in deren Punkten je zwei homologe Geraden der kollinearen Bündel (W_1) und (W_2) sich schneiden. Je zwei homologe s_k-fache Hauptebenen der kollinearen Bündel schneiden sich in einer s_k-fachen Gerade der Fläche Ψ. Diese Fläche be-

---

[5]) Visalli, Sopra una serie di superficie rappresentabili punto per punto sopra un piano. Nota II, Rend. Acc. Linc. (4) **2** sem. 2 (1886), p. 84—87.

[6]) G. Loria, Sugli enti geometrici generati da forme fondamentali in corrispondenza algebrica, Giornale della Societa di letture e conversazioni scientifiche di Genova (1887), p. 67—69 = Giornale di matematiche Napoli (2) **34** (1896), p. 354—374.

[7]) E. Kötter, Jahrbuch über die Fortschritte d. Mathematik **19** (1887), p. 596.

sitzt noch $2(n+2)$ einfache Geraden, und jede von ihnen ist eine Schnittgerade je dreier homologen Ebenen gegebener Bündel. Ich konstruiere die Tangentialebenen der Fläche Ψ in den Scheiteln W_0, W_1 und W_2 dieser Bündel und beweise, daß die Scheitel W_1, W_2 ganz beliebig auf der kubischen Raumkurve S_{12}^3 angenommen werden können. Ich untersuche die Eigenschaften der Plankurven und der unikursalen Raumkurven höherer Ordnung, welche der Fläche Ψ angehören. Ich gebe die projektiven Konstruktionen dieser Kurven an, bestimme ihre Schnittpunkte untereinander und die Schnittpunkte dieser Kurven mit der kubischen Raumkurve S_{12}^3 resp. mit den Geraden der Fläche Ψ. Zum Schluß bespreche ich kurz die Abbildungen der Fläche Ψ auf eine Punktebene.

Im Falle der Jonquièresschen Verwandtschaften n. Grades (s. Nr. 1) besitzt die betrachtete Fläche Ψ eine $(n-1)$-fache Gerade, $2(n-1)+2(n+2)$ einfache Geraden und ebensoviele Kegelschnitte. — Insbesondere ergibt sich [8]) für $n=2$ eine Fläche 5. Ordnung mit einer doppelten kubischen Raumkurve, welche 11 einfache Geraden und 55 Kegelschnitte (s. Nr. 11) besitzt. Jede von den drei Hauptebenen des Bündels (W_0) schneidet die Fläche Ψ^5 in einem Kegelschnitte und in einer allgemeinen Kurve 3. Ordnung. Die Fläche Ψ^5 besitzt [8]) 165 einfache singuläre Punkte derart, daß jeder von ihnen als Scheitel W_0 des Bündels (W_0) angesehen werden kann. Diese Fläche Ψ^5 kann auch folgendermaßen [8]) erzeugt werden: Von einem beliebigen Punkte W' projizieren wir die Schnittgeraden $a=\lambda\alpha$, $b=\lambda\beta$, ... der sämtlichen Tangentialebenen $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \ldots$ einer gegebenen nichtabwickelbaren Fläche 2. Grades Ω^2; dann erhalten wir eine [1,1]-deutige Verwandtschaft zwischen den Ebenen α und $\alpha'=W'a$, β und $\beta'=W'b$, ... der Bündel (Ω^2) und (W'). Sind die Bündel (W'), (W_1) und (W_2) kollinear, so schneiden sich je drei homologe Ebenen der Bündel (Ω^2), (W_1) und (W_2) in Punkten der Fläche 5. Ordnung Ψ^5. Vermittelst ebener Abbildungen untersuchten Clebsch [9]), Sturm [10]) [11]) und Jaeckel [12]) die Eigenschaften der Fläche Ψ^5.

1. Die Konstruktion einer Klasse Cremonascher Verwandtschaften n. Grades zwischen Ebenenbündeln. Es liegen zwei zentrische Ebenenbündel (W_0) und (W_1) vor, deren Ebenen $\alpha_0, \beta_0, \ldots$ und $\alpha_1, \beta_1, \ldots$ sich in einer *allgemeinen Cremonaschen Verwandtschaft n. Grades* befinden:

$$(1) \qquad (W_0)\pi^n(W_1).$$

Jeder r_i-fachen Hauptebene φ_i^0, $i=1,2,\ldots,\varrho$, des Bündels (W_0) entspricht im (W_1) ein unikursaler Fundamentalkegel Φ_i^1 von der Klasse r_i. Jeder s_k-fachen Hauptebene φ_k^1, $k=1,2,\ldots,\sigma$ (bekanntlich ist $\sigma=\varrho$) des Bündels (W_1) entspricht im (W_0) ein unikursaler Hauptkegel Φ_k^0 von der Klasse s_k. Bedeutet ferner μ_{ik} die Multiplizität der Tangentialebene φ_i^0 auf Φ_k^0 und μ_{ki}^1 die Vielfachheit der Tangentialebene φ_k^1 auf Φ_k^1, so ist $\mu_{ik}=\mu_{ki}^1$. Bekanntlich gelten folgende [13]) Beziehungen:

[8]) A. Plamitzer, Powierzchnia krzywolinjowa 5-go rzędu z podwójną krzywą skośną rzędu 3-go. Prace Matematyczno-Fizyczne, Warszawa, T. XXXVIII (1931) p. 79—128 i. T. XLII (1934), p. 109—132.

[9]) A. Clebsch, Über die Abbildung algebraischer Flächen, insbesondere der vierten und fünften Ordnung, Math. Annalen **1** (1869), p. 253—316.

[10]) R. Sturm, Über die Flächen mit einer endlichen Zahl von (einfachen) Geraden, vorzugsweise die der vierten und fünften Ordnung, Math. Annalen **4** (1871), p. 249—283.

[11]) R. Sturm, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften IV, Leipzig u. Berlin 1909, p. 311—315.

[12]) W. Jaeckel, Über Flächen 5. Ordnung mit einer doppelten kubischen Raumkurve. Dissertation Breslau (1904), p. 29—35.

[13]) R. Sturm, l. c. [11]), Nr. 785, 792.

(I) $$\sum_i r_i^2 = \sum_k s_k^2 = n^2 - 1$$

(II) $$\sum_i \tfrac{1}{2} r_i(r_i - 1) = \sum_k \tfrac{1}{2} s_k(s_k - 1) = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

(III) $$\sum_i r_i = \sum_k s_k = 3(n-1)$$

(IV) $$\sum_i \tfrac{1}{2} r_i(r_i + 1) = \sum_k \tfrac{1}{2} s_k(s_k + 1) = \tfrac{1}{2} n(n+3) - 2$$

(V) $$\sum_i \mu_{ik}\mu_{il} = s_k s_l, \quad \sum_k \mu_{ik}\mu_{hk} = r_i r_h \qquad (\text{für } k \neq l,\ i \neq h)$$

(VI) $$\sum_i r_i \mu_{ik} = n s_k \quad \sum_k s_k \mu_{ik} = n r_i$$

(VII) $$\sum_i \tfrac{1}{2}\mu_{ik}(\mu_{ik}-1) = \tfrac{1}{2}(s_k-1)(s_k-2), \quad \sum_k \tfrac{1}{2}\mu_{ik}(\mu_{ik}-1) = \tfrac{1}{2}(r_i-1)(r_i-2)$$

(VIII) $$\sum_i \mu_{ik}^2 = s_k^2 + 1 \quad \sum_k \mu_{ik}^2 = r_i^2 + 1$$

(IX) $$\sum_i \mu_{ik} = 3s_k - 1 \quad \sum_k \mu_{ik} = 3r_i - 1$$

(X) $$\sum_i \tfrac{1}{2}\mu_{ik}(\mu_{ik}+1) = \tfrac{1}{2} s_k(s_k+3), \quad \sum_k \tfrac{1}{2}\mu_{ik}(\mu_{ik}+1) = \tfrac{1}{2} r_i(r_i+3)$$

(XI) $$\sum_i (r_i - \mu_{ik})^2 = (n - s_k)^2, \quad \sum_k (s_k - \mu_{ik})^2 = (n - r_i)^2.$$

Wenn eine Ebene z. B. des Bündels (W_0) eine Kegelfläche ν. Klasse beschreibt, welche jede r_i-fache Fundamentalebene φ_i^0 zur l_i-fachen Tangentialebene besitzt, so beschreibt die entsprechende Ebene in dem Bündel (W_1) eine Kegelfläche von der Klasse $(\nu n - \sum_i l_i r_i)$, für welche jede s_k-fache Hauptebene φ_k^1 eine $(\nu s_k - \sum_i l_i \mu_{ik})$-fache Tangentialebene ist.

Anmerkung. Insbesondere kann jedes Ebenenbündel eine $(n-1)$-fache Hauptebene und $2(n-1)$ einfache Fundamentalebenen besitzen. In jedem Bündel schneidet die $(n-1)$-fache Hauptebene die einfachen Hauptebenen in $2(n-1)$ Fundamentalgeraden. Jedes Bündel besitzt eine Hauptkegelfläche $(n-1)$. Klasse, für welche die $(n-1)$-fache Hauptebene eine $(n-2)$-fache Tangentialebene und jede von den $2(n-1)$ einfachen Hauptebenen eine einfache Tangentialebene ist. Diese Transformation heißt Jonquièressche Verwandtschaft n. Grades.

Zwischen m gegebenen zentrischen Bündeln (W_ι), $\iota = 1, 2, \ldots, m$, stellen wir *allgemeine Kollineationen* her:

(2) $$(W_1) \varkappa (W_2) \varkappa (W_3) \varkappa \cdots \varkappa (W_m)$$

und bezeichnen mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ entsprechende Ebenen und mit $b_1, b_2, \ldots, b_m$ homologe Geraden dieser Bündel. Jeder Fundamentalebene φ_k^1 und jedem Hauptkegel Φ_i^1 des Bündels (W_1) entspricht in (W_ε), $\varepsilon = 2, 3, \ldots, m$, eine Hauptebene φ_k^ε bzw. ein Hauptkegel Φ_i^ε. Zwischen dem Ebenenbündel (W_0) und jedem von den $m-1$ übrigen Ebenenbündeln (W_ε) ergibt sich unmittelbar aus den Relationen (1) und (2) folgende Klasse *allgemeiner Cremonascher Verwandtschaften n. Grades*:

(3) $$(W_0)\,\pi^n(W_2),\ (W_0)\,\pi^n(W_3),\ \ldots,\ (W_0)\,\pi^n(W_m).$$

Jeder r_i-fachen Hauptebene φ_i^0 des Bündels (W_0) entspricht im Bündel (W_ε) ein unikursaler Hauptkegel Φ_i^ε von der Klasse r_i. Jeder s_k-fachen Fundamentalebene φ_k^ε des Bündels (W_ε) entspricht im Bündel (W_0) ein unikursaler Hauptkegel Φ_k^0 von der Klasse s_k.

Die betrachteten Ebenenbündel (W_0) und (W_ι), $\iota = 1, 2, \ldots, m$, schneiden wir mit einer beliebigen Ebene ω, welche die Scheitel W_0, W_ι dieser Bündel nicht enthält, in den ebenen Strahlenfeldern (ω_0) und (ω_ι). Aus den Relationen (2), (1) und (3) ergeben sich unmittelbar *allgemeine Kollineationen*

(2 a) $$(\omega_1) \varkappa (\omega_2) \varkappa \cdots \varkappa (\omega_m)$$

und *allgemeine Cremonasche Verwandtschaften n. Grades*:

(1 a) $(\omega_0)\ \pi^n(\omega_1)$

(3 a) $(\omega_0)\ \pi^n(\omega_2),\ (\omega_0)\ \pi^n(\omega_3),\ \ldots,\ (\omega_0)\ \pi^n(\omega_m).$

Die Geraden $a_0 = \alpha_0\omega,\ a_1 = \alpha_1\omega, \ldots, a_m = \alpha_m\omega$ sind homologe Strahlen dieser Felder. Jeder r_i-fachen Fundamentalgeraden $f_i^0 = \varphi_i^0\omega$ des Strahlenfeldes (ω_0) entspricht in dem ebenen Strahlenfelde (ω_ι) eine unikursale Fundamentalkurve f_i^ι von der Klasse r_i (nämlich die Schnittkurve des Hauptkegels Φ_i^ι mit der Ebene ω). Jeder s_k-fachen Hauptgeraden $f_k^\iota = \varphi_k^\iota\omega$ des Feldes (ω_ι) entspricht in (ω_0) eine unikursale Hauptkurve f_k^0 von der Klasse s_k (nämlich die Schnittkurve des Hauptkegels Φ_k^0 mit der Ebene ω).

2. Eigenschaften dreier Ebenenbündel. Zwischen drei Ebenenbündeln (W_0), (W_1) und (W_2), deren Scheitel drei beliebige, voneinander verschiedene Punkte W_0, W_1, W_2 sind, stellen wir folgende Beziehungen her:

(4) $\qquad (W_1) \varkappa (W_2), \quad (W_0)\,\pi^n(W_1), \quad (W_0)\,\pi^n(W_2),$

welche den Relationen (1), (2) und (3) in Nr. 1 entsprechen.

Die Schnittgeraden $a_{12} = \alpha_1\alpha_2,\ b_{12} = \beta_1\beta_2, \ldots$ homologer Ebenen α_1 und α_2, β_1 und $\beta_2, \ldots$ der kollinearen Bündel $(W_1) \varkappa (W_2)$ erzeugen bekanntlich eine Kongruenz K_{12} erster Ordnung und dritter Klasse. Diese Geraden $a_{12}, b_{12}, \ldots$ sind Bisekanten der kubischen Raumkurve S_{12}^3, welche durch homologe sich schneidende Strahlen der kollinearen Bündel $(W_1) \varkappa (W_2)$ erzeugt ist. Jeder Punkt der Kurve S_{12}^3, die durch die Scheitel W_1 und W_2 der Bündel $(W_1) \varkappa (W_2)$ geht, ist ein singulärer Punkt 2. Grades.

Das Erzeugnis der Schnittlinien $a_{0\varepsilon} = \alpha_0\alpha_\varepsilon,\ b_{0\varepsilon} = \beta_0\beta_\varepsilon, \ldots$ homologer Ebenen α_0 und α_ε, β_0 und $\beta_\varepsilon, \ldots$ zweier Ebenenbündel $(W_0)\,\pi^n(W_\varepsilon)$, $\varepsilon = 1, 2$, welche in einer Cremonaschen Verwandtschaft n. Grades sich befinden, ist [14]) eine Kongruenz $K_{0\varepsilon}$ n. Ordnung, $(n+2)$. Klasse, mit den Scheiteln W_0, W_ε als singulären Punkten $(n+1)$. Grades. Jede r_i-fache Hauptebene φ_i^0 des Bündels (W_0) ist singulär vom Grade r_i und jede s_k-fache Hauptebene φ_k^ε des Bündels (W_ε) ist singulär vom Grade s_k für die Kongruenz $K_{0\varepsilon}$. — Solche Kongruenzen K_{01} und K_{02} hat man Cremonasche genannt.

Betrachtet man drei Kongruenzen K_{12}, K_{01}, K_{02} und die Relation (4), so gilt folgender Satz:

Die drei Strahlenkongruenzen K_{12}, K_{01} *und* K_{02} *besitzen* $2(n+2)$ *gemeinsame Geraden. Durch jede von diesen Geraden* $t_{012}^\iota = \tau_0^\iota\tau_1^\iota\tau_2^\iota$, $\iota = 1, 2, \ldots, 2n+4$, *gehen je drei homologe Ebenen* $\tau_0^\iota, \tau_1^\iota, \tau_2^\iota$ *der betrachteten Bündel* (W_0), (W_1), (W_2).

Um dies zu beweisen, stellen wir im Bündel (W_0) eine Hilfskorrespondenz zwischen den Ebenen her [15]), indem wir jeder Ebene α_0 diejenige Ebene $\alpha' = W_0 a_{12}$ zuordnen, welche nach der Schnittlinie $a_{12} = \alpha_1\alpha_2$ der beiden in den Bündeln (W_1) und (W_2) — vgl. die Relation (4) — entsprechenden Ebenen α_1, α_2 geht. Weil diese Geraden $a_{12}, \ldots$ eine Bisekantenkongruenz K_{12} der kubischen Raumkurve S_{12}^3 bilden, so enthält jede Ebene α' drei Bisekanten der S_{12}^3 und hat drei entsprechende Ebenen α_0. Die so erhaltene Korrespondenz zwischen den Ebenen α_0 und α' ist daher eine [1,3]-deutige Verwandtschaft. — Einem Ebenenbüschel $c_0(\alpha_0, \beta_0, \ldots)$, dessen Achse eine beliebige Gerade c_0 des Bündels (W_0) ist, entsprechen — vgl. Nr. 1 und die Relation (4) — in (W_1) und (W_2) zwei projektive Tangentialebenenbüschel

(5) $\qquad \Gamma_1^n(\alpha_1, \beta_1, \ldots) \,\overline{\wedge}\, \Gamma_2^n(\alpha_2, \beta_2, \ldots),$

---

[14]) R. Sturm, l. c. [11]), Nr. 791.

[15]) P. Visalli (l. c. p. 86) konstruiert ganz analog eine Korrespondenz $[n+2, 1]$ vom Grade $m(n+1)$.

deren Träger unikursale Kegelflächen n. Klasse Γ_1^n, Γ_2^n sind. Diese Büschel erzeugen [16]) eine Regelfläche $2n$. Grades Γ. Wenn im Bündel (W_0) die Ebene α_0 ein Büschel (c_0) durchläuft, beschreibt die Gerade $a_{12} = \alpha_1\alpha_2$ diese Regelfläche Γ, und die Ebenen $\alpha' = W_0\, a_{12}, \ldots$ umhüllen den Tangentialkegel $2n$. Klasse an dieser Regelfläche Γ. Die so erhaltene Korrespondenz $[1, 3]$ zwischen den Ebenen α_0 und α' ist vom Grade $2n$ und besitzt [17]) $1 + 3 + 2n = 2(n+2)$ Koinzidenzebenen. Jede von diesen Koinzidenzebenen, z. B. $\tau_0 = \tau'$, enthält die Gerade t_{12}, in der drei homologe Ebenen τ_0, τ_1, τ_2 der Bündel (W_0), (W_1) und (W_2) sich schneiden. Diese Gerade $t_{12} = t_{01} = t_{02}$ gehört gleichzeitig zu den drei Strahlenkongruenzen K_{12}, K_{01} und K_{02}. Es gibt also $2(n+2)$ solcher Geraden, w. z. b. w.

Dem eben bewiesenen Satz können wir auch folgende Form geben:

Sind zwischen dem Ebenenbündel (W_0) *und jedem von zwei kollinearen Ebenenbündeln* (W_1), (W_2) — deren Scheitelpunkte beliebig und voneinander verschieden sind — *Cremonasche Verwandtschaften n. Grades festgestellt, so schneiden sich* $2(n+2)$*-mal drei homologe Ebenen* τ_0', τ_1', τ_2' *dieser Bündel in je einer Geraden* $t_{012}' = \tau_0'\tau_1'\tau_2'$.

Durch den Scheitel W_0 des Bündels (W_0) geht eine einzige Gerade $b_{12} = \beta_1\beta_2$ der Kongruenz 1. Ordnung K_{12}. Der Scheitel W_0 enthält daher nur ein Tripel homologer Ebenen β_0, β_1, β_2 der Bündel (W_0), (W_1) und (W_2). Durch den Scheitel W_1 gehen n Geraden $c_{02} = \gamma_0\gamma_2$, $d_{02} = \delta_0\delta_2, \ldots$ der Kongruenz n. Ordnung K_{02}. Im Scheitel W_1 schneiden sich die n Tripel $\gamma_0\gamma_1\gamma_2$, $\delta_0\delta_1\delta_2, \ldots$ entsprechender Ebenen der betrachteten Bündel. Daher folgt:

Der Scheitel W_0 *des Bündels* (W_0) *enthält nur ein Tripel, und jeder Scheitel* W_1, W_2 *der Bündel* (W_1), (W_2) *enthält n Tripel homologer Ebenen der betrachteten Ebenenbündel* (W_0), (W_1), (W_2).

3. Die Fläche $(2n+1)$. Ordnung Ψ mit einer n-fachen kubischen Raumkurve, erzeugt durch drei Ebenenbündel (W_0), (W_1), (W_2). Homologe Ebenen dieser Bündel, welche der Relation (4) in Nr. 2 genügen, schneiden sich in Punkten $A = \alpha_0\alpha_1\alpha_2$, $B = \beta_0\beta_1\beta_2, \ldots$ einer krummen Fläche Ψ. Aus Nr. 2 folgt unmittelbar, daß die $2n+2$ Geraden $t_{012}' = \tau_0'\tau_1'\tau_2'$ der Oberfläche Ψ angehören.

Es gelten [18]) folgende Sätze:

Sind zwischen dem Ebenenbündel (W_0) *und jedem von zwei kollinearen Ebenenbündeln* (W_1), (W_2) — deren Scheitelpunkte beliebig und voneinander verschieden sind — *allgemeine Cremonasche Verwandtschaften n. Grades festgestellt, so erzeugen die Schnittpunkte sämtlicher Tripel homologer Ebenen dieser Bündel eine Fläche* $(2n+1)$*. Ordnung* Ψ. *Die kubische Raumkurve* S_{12}^3, in deren Punkten je zwei homologe Strahlen der kollinearen Bündel (W_1) und (W_2) sich schneiden, *ist eine n-fache Kurve dieser Fläche* Ψ.

Jede Schnittgerade $f_{12}^k = \varphi_k^1\varphi_k^2$ *zweier homologen* s_k*-fachen Hauptebenen der betrachteten Bündel* (W_1) *und* (W_2) *ist eine* s_k*-fache Gerade der Fläche* Ψ. *Jede von den* $2(n+2)$ *Schnittgeraden* $t_{012}' = \tau_0'\tau_1'\tau_2'$ *dreier homologen Ebenen der betrachteten Bündel* (W_0), (W_1) *und* (W_2) *ist eine einfache Gerade der Fläche* Ψ. *Diese Geraden* f_{12}^k *und* t_{012}' *der Fläche* Ψ *sind Bisekanten der n-fachen kubischen Raumkurve* S_{12}^3 *von* Ψ.

---

[16]) R. Sturm, l. c. [11]), Bd. I, Nr. 177.

[17]) R. Sturm, l. c. [11]), IV Nr. 839.

[18]) A. Plamitzer, Erzeugnisse einer Klasse Cremonascher Verwandtschaften n. Grades zwischen Grundgebilden zweiter Stufe, Nr. 9, dieses Journal **171** (1934), S. 187.

Anmerkung. Sind Jonquièressche Verwandtschaften n. Grades festgestellt, so besitzt (vgl. Nr. 1) die Fläche Ψ eine $(n-1)$-fache Gerade $f_{12}^{n-1} = \varphi_{n-1}^{1}\,\varphi_{n-1}^{2}$, $2(n-1)$ einfache Geraden $f_{12}^{k} = \varphi_{k}^{1}\,\varphi_{k}^{2}$ und $2(n+2)$ einfache Geraden $t_{012}^{\iota} = \tau_{0}^{\iota}\,\tau_{1}^{\iota}\,\tau_{2}^{\iota}$.

Eine beliebige Gerade c_0 des Bündels (W_0) schneidet die Fläche Ψ in $2n+1$ Punkten. Um sie zu bestimmen, betrachten wir zwei projektive Tangentialebenenbüschel $(\Gamma_1^n) \barwedge (\Gamma_2^n)$, welche (vgl. die Relation (5) in Nr. 2) dem Ebenenbüschel (c_0) entsprechen. Diese Büschel erzeugen eine Regelfläche $2n$. Grades Γ, und die $2n$ Schnittpunkte der Achse c_0 mit Γ liegen auf der Oberfläche Ψ. Es folgt unmittelbar, daß *der Scheitel des Bündels* (W_0) *ein einfacher Punkt* W_0 *der Fläche* Ψ *ist.*

Der Scheitel W_0 enthält (Nr. 2) nur ein Tripel homologer Ebenen $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ der betrachteten Bündel (W_0), (W_1) und (W_2). Liegt die Achse c_0 auf der Ebene β_0, so ist β_1 (resp. β_2) eine Tangentialebene der Kegelfläche Γ_1^n (resp. Γ_2^n), und die Erzeugende $b_{12} = \beta_1\beta_2$ der Regelfläche Γ geht durch den Scheitel W_0 hindurch. In diesem Falle sind die Schnittpunkte W_0 und $b_{12}\,c_0$ der Achse c_0 mit Ψ identisch, *die Achse* c_0 *ist eine Tangente der Fläche* Ψ *im Punkte* W_0 *und die Ebene* β_0 *ist eine Tangentialebene von* Ψ *im Scheitel* W_0.

Einem Ebenenbüschel $d_1(\alpha_1, \ldots)$, dessen Achse eine beliebige Gerade d_1 des Bündels (W_1) ist, entsprechen — vgl. Nr. 1 und die Relation (4) in Nr. 2 — zwei projektive Ebenenbüschel

$$\Delta_0^n(\alpha_0, \ldots) \barwedge d_2(\alpha_2, \ldots), \tag{6}$$

deren Träger eine unikursale Kegelfläche n. Klasse Δ_0^n des Bündels (W_0) und eine Gerade d_2 des Bündels (W_2) sind. Diese Büschel erzeugen eine Regelfläche $(n+1)$. Grades Δ, und die $n+1$ Schnittpunkte der Achse d_1 mit Δ liegen auf der Oberfläche Ψ. Die Achse d_1 schneidet daher die Fläche Ψ in diesen $n+1$ Punkten und in einem (Nr. 2) n-fachen Punkte W_1.

Der Scheitel W_1 des Bündels (W_1) enthält (Nr. 2) n Tripel homologer Ebenen $\gamma_0\gamma_1\gamma_2, \delta_0\delta_1\delta_2, \ldots$ der betrachteten Bündel (W_0), (W_1) und (W_2). Es ist leicht zu bemerken, daß die Ebenen $\gamma_0, \delta_0, \ldots$ sich in der Geraden W_0W_1 schneiden, die Ebenen $\gamma_2, \delta_2, \ldots$ in der Geraden $W_2W_1 = u_2$ und die Ebenen $\gamma_1, \delta_1, \ldots$ in der Geraden u_1. Der Geraden u_2 des Bündels (W_2) entspricht bekanntlich im kollinearen Bündel (W_1) *die Tangente* u_1 der kubischen Raumkurve S_{12}^3 im Scheitel W_1. Liegt die Achse d_1 z. B. auf der Ebene γ_1, so ist γ_0 eine Tangentialebene der Kegelfläche Δ_0^n, γ_2 eine Ebene des Büschels (d_2), und die Erzeugende $c_{02} = \gamma_0\gamma_2$ der Regelfläche Δ geht durch den Scheitel W_1 hindurch. Von den $n+1$ Schnittpunkten der Achse d_1 mit Δ (die der Fläche Ψ angehören) fällt der einfache Punkt $c_{02}\,d_1$ mit dem n-fachen Punkte W_1 der Fläche Ψ zusammen. Die Achse d_1 ist eine Tangente von Ψ im Punkte W_1, und die Ebene γ_1 ist eine Tangentialebene von Ψ im Punkte W_1. Aus unseren Betrachtungen folgt, daß *der Tangentialkegel n. Ordnung der Fläche* Ψ *im Punkte* W_1 *der n-fachen kubischen Raumkurve* S_{12}^3 *von* Ψ *in n durch die Tangente* u_1 *im Punkte* W_1 *von* S_{12}^3 *gehende Ebenen* $\gamma_1, \delta_1, \ldots$ *zerfällt.*

Da aber jeder beliebige Punkt der kubischen Raumkurve S_{12}^3 (vgl. Nr. 4) als Scheitel W_1 des Bündels (W_1) angenommen werden kann, so ist die oben angegebene Konstruktion der Tangentialebenen für alle auf S_{12}^3 liegenden n-fachen Punkte der Fläche Ψ gültig.

4. Weitere projektive Konstruktionen der Fläche $(2n+1)$. Ordnung Ψ mit einer n-fachen kubischen Raumkurve. Erzeugen die Bündel (W_0), (W_1) und (W_2), welche der Relation (4) in Nr. 2 genügen:

$$(W_1) \varkappa (W_2), \quad (W_0) \pi^n (W_1), \quad (W_0) \pi^n (W_2), \tag{4}$$

die Oberfläche $(2n+1)$. Ordnung Ψ, so schneiden sich je drei homologe Ebenen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ dieser Bündel in einem Punkte $A = \alpha_0\,\alpha_1\,\alpha_2$ der Fläche Ψ. Durch diesen Punkt A gehen folgende Geraden: $a_{12} = \alpha_1\,\alpha_2$ der Kongruenz K_{12} (vgl. Nr. 2), $a_{01} = \alpha_0\,\alpha_1$ der Kongruenz K_{01} und $a_{02} = \alpha_0\,\alpha_2$ der Kongruenz K_{02}. Diesen Punkt $A = \alpha_0\,\alpha_1\,\alpha_2$ der Fläche Ψ kann man daher als Schnittpunkt $A = \alpha_0\,a_{12}$ oder $A = \alpha_2\,a_{01}$ resp. $A = \alpha_1\,a_{02}$ ansehen.

Aus der Relation (4) ergibt sich eine $[1,1]$-deutige Verwandtschaft $2n$. Grades zwischen den Ebenen $\alpha_0, \beta_0, \ldots$ des Bündels (W_0) und den Geraden $a_{12} = \alpha_1\alpha_2, b_{12} = \beta_1\beta_2, \ldots$ der Kongruenz 1. Ordnung und 3. Klasse K_{12}. Wenn die Ebene α_0 im Bündel (W_0) ein Büschel (c_0) durchläuft, so beschreibt (vgl. die Relation (5) in Nr. 2) die Gerade $a_{12} = \alpha_1\alpha_2$ der Kongruenz K_{12} eine Regelfläche $2n$. Grades Γ. Diese Regelfläche ist [19]) im allgemeinen vom Range $2(2n-1)$ und Geschlecht 0 (unikursal), besitzt eine Doppelkurve von der Ordnung $\delta = \frac{1}{2}(2n-1)(2n-2)$ und hat n-fache Punkte in den Scheiteln W_1, W_2 der Ebenenbündel (W_1) und (W_2). Da man aber je zwei beliebige Punkte der kubischen Raumkurve S_{12}^3 (vgl. unten die Relation (7)) als Scheitel W_1 und W_2 der Bündel (W_1), (W_2) annehmen kann, so ist diese Raumkurve eine *n-fache Kurve* der Fläche Γ. Da jede Hauptebene z. B. φ_k^1 des Bündels (W_1) eine s_k-fache Tangentialebene des Kegels Γ_1^n ist, so ist jede Gerade $f_{12}^k = \varphi_k^1\,\varphi_k^2$ eine s_k-fache Erzeugende der Regelfläche Γ und zählt für $\frac{1}{2}s_k(s_k-1)$ Doppelerzeugende. Somit zählen alle s_k-fachen Erzeugenden f_{12}^k, $k = 1, 2, \ldots, \sigma$, der Regelfläche Γ (s. die Beziehung II in Nr. 1) für $\Sigma\,\frac{1}{2}s_k(s_k-1) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Doppelerzeugende. — Die Doppelkurve der unikursalen Regelfläche Γ zerfällt daher in die n-fache kubische Raumkurve S_{12}^3 und in alle s_k-fachen Erzeugenden $f_{12}^k = \varphi_k^1\varphi_k^2$, denn es ist

$$3\cdot\tfrac{1}{2}n(n-1) + \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) = \tfrac{1}{2}(2n-1)(2n-2) = \delta.$$

— Liegt die Achse c_0 des Büschels (c_0) auf einer r_i-fachen Hauptebene φ_i^0, so zerfällt die Regelfläche Γ (vgl. Nr. 7) in eine unikursale Regelfläche $2r_i$. Grades und in eine unikursale Regelfläche $2(n-r_i)$. Grades. Daher gilt:

Befinden sich die Ebenen $\alpha_0, \beta_0, \ldots$ *des Bündels* (W_0) *und die Geraden* $a_{12} = \alpha_1\alpha_2$, $b_{12} = \beta_1\beta_2, \ldots$ *der Kongruenz* 1. *Ordnung und* 3. *Klasse* K_{12} — welche durch kollineare Ebenenbündel (W_1), (W_2) erzeugt ist — *in einer* oben angegebenen $[1,1]$-*deutigen Verwandtschaft* $2n$. *Grades, so erzeugen die Schnittpunkte* $A = a_{12}\,\alpha_0$, $B = b_{12}\,\beta_0, \ldots$ *homologer Elemente dieser Verwandtschaft die Fläche* $(2n+1)$. *Ordnung* Ψ *mit einer n-fachen kubischen Raumkurve* S_{12}^3.

Aus der Relation (4) ergibt sich eine Verwandtschaft $[1,1]$ vom Grade $n+1$ zwischen den Ebenen $\alpha_1, \beta_1, \ldots$ des Bündels (W_1) und den Geraden $a_{02} = \alpha_0\alpha_2$, $b_{02} = \beta_0\beta_2, \ldots$ der Kongruenz n. Ordnung und $(n+2)$. Klasse K_{02}. Wenn die Ebene α_1 im Bündel (W_1) ein Büschel (d_1) durchläuft, so beschreibt (vgl. die Relation (6) in Nr. 3) die Gerade $a_{02} = \alpha_0\alpha_2$ der Kongruenz K_{02} eine Regelfläche $(n+1)$. Grades Δ. Diese Regelfläche ist [19]) im allgemeinen vom Range $2n$ und Geschlecht 0 (unikursal), besitzt die Achse d_2 zur n-fachen Leitgeraden und den Scheitel W_0 des Bündels (W_0) zum einfachen Punkte. — Liegt die Achse d_1 des Büschels (d_1) auf einer s_k-fachen Hauptebene φ_k^1, so entspricht dieser Ebene in den Bündeln (W_0) und (W_2) der Hauptkegel Φ_k^0 und die Hauptebene φ_k^0. Dem Büschel (d_1) entsprechen in diesem Falle zwei projektive

---

[19]) A. Plamitzer, Erzeugnisse projektiver Involutionen höheren Grades, deren Träger unikursale Gebilde sind (I. u. II. Mitteilung), Sitzungsber. d. Akademie d. Wissenschaften in Wien (Math.-naturw. Kl. Abt. II a) **125** (1916) u. **126** (1917), Nr. 11—20. — Über mehrdeutige Verwandtschaften auf unikursalen Trägern, Prace Matematyczno-Ficzyczne, T. XXX (1919), Nr. 10.

Ebenenbüschel $(\Delta_0^{n-s_k}) \barwedge (d_2)$, deren Träger eine unikursale Kegelfläche $(n - s_k)$. Klasse $\Delta_0^{n-s_k}$ des Bündels (W_0) und eine Gerade d_2 des Bündels (W_2) sind. Das Erzeugnis dieser Bündel ist eine unikursale Regelfläche $(n - s_k + 1)$. Grades und $2(n - s_k)$. Ranges Δ^*, welche die Achse d_2 zur $(n - s_k)$-fachen Leitgeraden besitzt. Wenn die Ebene α_1 den Büschel (d_1) durchläuft, so beschreibt in diesem Falle die Gerade $a_{02} = \alpha_0\alpha_2$ der Kongruenz K_{02} die Regelfläche Δ^* und eine Plankurve s_k. Klasse, d. i. die Schnittkurve des Hauptkegels Φ_k^0 mit der Hauptebene φ_k^2. Es ergibt sich daher — für $\iota = 1, 2$ und $\varkappa = 2, 1$ — folgender Satz:

Befinden sich die Ebenen $\alpha_\iota, \beta_\iota, \ldots$ *des Bündels* (W_ι) *und die Geraden* $a_{0\varkappa} = \alpha_0\alpha_\varkappa$, $b_{0\varkappa} = \beta_0\beta_\varkappa, \ldots$ *der Kongruenz n. Ordnung und* $(n+2)$*. Klasse* $K_\varkappa$ — welche durch Ebenenbündel $(W_0)\,\pi^n(W_\varkappa)$ erzeugt ist — *in der* oben angegebenen $[1,1]$*-deutigen Verwandtschaft* $(n+1)$*. Grades, so erzeugen die Schnittpunkte* $A = a_{0\varkappa}\alpha_\iota$, $B = b_{0\varkappa}\beta_\iota, \ldots$ *homologer Ebenen dieser Verwandtschaft die Fläche* $(2n+1)$*. Ordnung* Ψ *mit einer n-fachen kubischen Raumkurve* S_{12}^3.

Die Geraden $a_{12} = \alpha_1\alpha_2$, $b_{12} = \beta_1\beta_2, \ldots$ der betrachteten Bisekantenkongruenz K_{12} der kubischen Raumkurve S_{12}^3 projizieren wir von den beliebig auf S_{12}^3 angenommenen Punkten W_1^* und W_2^*. Die so erhaltenen Ebenen $\alpha_1^* = W_1^* a_{12}$ und $\alpha_2^* = W_2^* a_{12}$, $\beta_1^* = W_1^* b_{12}$ und $\beta_2^* = W_2^* b_{12}, \ldots$ sind homologe Elemente der *kollinearen* Bündel (W_1^*) und (W_2^*). Alle kollineare Ebenenbündel (W_1), (W_2), (W_1^*), (W_2^*), …, deren Scheitel auf einer kubischen Raumkurve S_{12}^3 liegen und deren homologe Ebenen in je einer Bisekante der S_{12}^3 sich schneiden, d. h. solche Ebenenbündel, welche eine einzige Bisekantenkongruenz K_{12} der kubischen Raumkurve S_{12}^3 erzeugen, bezeichnet [20]) Th. Reye als „eine Reihe kollinearer Bündel". Aus der betrachteten Reihe kollinearer Bündel

$$(7) \qquad (W_1)\,\varkappa\,(W_2)\,\varkappa\,(W_1^*)\,\varkappa\,(W_2^*)$$

und der Relation (4) ergeben sich unmittelbar (vgl. Nr. 1) folgende allgemeine Cremonasche Verwandtschaften n. Grades:

$$(8) \qquad (W_0)\,\pi^n(W_1^*), \qquad (W_0)\,\pi^n(W_2^*)$$

zwischen den Ebenen dieser Bündel.

Ein beliebiger Punkt $A = \alpha_0\alpha_1\alpha_2$ der Oberfläche Ψ ist Schnittpunkt $A = \alpha_0\, a_{12}$ der Ebene α_0 mit der Geraden $a_{12} = \alpha_1\,\alpha_2$ der Kongruenz K_{12}. Aus der Beziehung $a_{12} = \alpha_1\alpha_2 = \alpha_1^*\alpha_2^*$ folgt, daß drei homologe Ebenen α_0, α_1^* und α_2^* der Bündel (W_0), (W_1^*) und (W_2^*) im Punkte $A = \alpha_0\alpha_1^*\alpha_2^*$ der Fläche Ψ sich schneiden. Es ergibt sich daher folgender *Fundamentalsatz*:

Sind zwischen dem Ebenenbündel (W_0) *und je zwei kollinearen Ebenenbündeln* $(W_1^*), (W_2^*)$ — *die zu einer Reihe kollinearer Bündel gehören und eine gemeinsame Bisekantenkongruenz der kubischen Raumkurve* S_{12}^3 *bilden*, wobei der Scheitel W_0 des Bündels (W_0) nicht auf der S_{12}^3 liegt — *allgemeine Cremonasche Verwandschaften n. Grades festgestellt, so erzeugen die Schnittpunkte sämtlicher Tripel homologer Ebenen dieser Bündel eine Fläche* $(2n+1)$*. Ordnung mit einer n-fachen kubischen Raumkurve* S_{12}^3.

Vermittelst der Relationen (7) und (8) ergeben sich (vgl. Nr. 2) noch weitere Cremonasche Strahlenkongruenzen n. Grades und $(n+2)$. Klasse K_{01}^*, $K_{02}^*, \ldots$ Homologe Geraden, z. B. $a_{01}^* = \alpha_0\alpha_1^*$, $a_{02}^* = \alpha_0\alpha_2^*, \ldots$ dieser Kongruenzen liegen auf der Ebene α_0 des Bündels (W_0) und schneiden sich in dem Punkte $A = \alpha_0 a_{12}$ der untersuchten Fläche Ψ.

---

[20]) Journal für Mathematik **10** (1833), S. 214.

5. Ebene Schnittkurven der Fläche $(2n+1)$. Ordnung Ψ. Schneiden wir die untersuchte Fläche Ψ mit einer beliebigen Ebene ω, welche die Scheitel W_0, W_1 und W_2 der in Nr. 4 gegebenen Bündel (W_0), (W_1), (W_2), die s_k-fachen Geraden $f_{12}^k = \varphi_k^1 \varphi_k^2$ (vgl. Nr. 3) und die einfachen Geraden t_{012}' der Fläche Ψ nicht enthält, so schneidet ω die drei gegebenen Bündel in drei kollokalen ebenen Strahlenfeldern (ω_0), (ω_1) und (ω_2), die (vgl. Nr. 1) den Relationen (2a), (1a) und (3a) genügen. Die s_k-fachen Geraden $f_k^1 = \varphi_k^1 \omega$ und $f_k^2 = \varphi_k^2 \omega$ der Felder (ω_1), (ω_2) schneiden sich im Punkte F_{12}^k, der auf der s_k-fachen Geraden $f_{12}^k = \varphi_k^1 \varphi_k^2$ der Fläche Ψ liegt. Ist E ein Schnittpunkt der Ebene ω mit der n-fachen kubischen Raumkurve S_{12}^3 der Fläche Ψ, so sind $e_1 = W_1 E$, $e_2 = W_2 E$ homologe Strahlen der kollinearen Bündel $(W_1) \varkappa (W_2)$. Daher sind Punkte $E_1 = e_1 \omega$ und $E_2 = e_2 \omega$ der kollokalen Felder $(\omega_1) \varkappa (\omega_2)$ identisch und bilden einen Koinzidenzpunkt $E = E_1 = E_2$ dieser Felder. Die so erhaltenen kollokalen Strahlenfelder (ω_0), (ω_1) und (ω_2) erzeugen [21]) im allgemeinen eine Plankurve $(2n+1)$. Ordnung, $2(4n-1)$. Klasse und $(2n-1)$. Geschlechts. Jeder von den drei Koinzidenzpunkten der kollokalen Felder $(\omega_1) \varkappa (\omega_2)$ ist ein n-facher Punkt, und jeder Schnittpunkt $F_{12}^k = f_k^1 f_k^2$ der s_k-fachen Geraden dieser Felder ist ein s_k-facher Punkt dieser Plankurve K. — Sind Jonquièressche Verwandtschaften n. Grades festgestellt, so besitzt diese Plankurve außer den drei n-fachen noch einen $(n-1)$-fachen Punkt $F_{12}^{n-1} = f_{n-1}^1 f_{n-1}^2$.

Enthält die Schnittebene ω gegen die Voraussetzung die Scheitel W_1 und W_2, so kann man (vgl. die Relation (7) in Nr. 4) die Bündel (W_1), (W_2) durch die Ebenenbündel (W_1^*) und (W_2^*) ersetzen. Es gilt daher folgender Satz:

Eine beliebige Ebene ω, die weder den Scheitel W_0 des Bündels (W_0) noch eine von den s_k-fachen Geraden $f_{12}^k = \varphi_k^1 \varphi_k^2$ resp. einfachen Geraden $t_{012}' = \tau_0' \tau_1' \tau_2'$ der betrachteten Fläche $(2n+1)$. Ordnung Ψ enthält, schneidet diese Fläche im allgemeinen längs einer Kurve $(2n+1)$. Ordnung, $2(4n-1)$. Klasse und $(2n-1)$. Geschlechts. Die Ebene ω schneidet die n-fache kubische Raumkurve S_{12}^3 der Fläche Ψ in drei n-fachen Punkten, jede s_k-fache Gerade f_{12}^k (resp. einfache Gerade t_{012}') der Fläche Ψ in einem s_k-fachen (resp. einfachen) Punkte der ebenen Schnittkurve.

Anmerkung. Im Falle der Jonquièresschen Verwandtschaft n. Grades besitzt diese ebene Schnittkurve der Fläche Ψ außer den drei n-fachen noch einen $(n-1)$-fachen Punkt $F_{12}^{n-1} = \omega f_{12}^{n-1}$.

Enthält die Schnittebene ω eine s_k-fache Gerade $f_{12}^k = \varphi_k^1 \varphi_k^2$ der Fläche Ψ, so fallen die s_k-fachen Geraden $f_k^1 = \omega \varphi_k^1$, $f_k^2 = \omega \varphi_k^2$ der vorher betrachteten kollokalen Felder (ω_1), (ω_2) mit der Geraden f_{12}^k zusammen. Da aber jeder Punkt P dieser Geraden als ein s_k-facher Punkt $F_{12}^k = f_k^1 f_k^2$ der Plankurve K angesehen werden kann, so zerfällt K in diese s_k-fache Gerade f_{12}^k und in eine Plankurve K_1 von der Ordnung $2n - s_k + 1$. Sind E, F, G die Schnittpunkte der Ebene ω mit der kubischen Raumkurve S_{12}^3 und gehören die beiden ersten von ihnen der Geraden f_{12}^k an, so hat die Kurve K_1 einen n-fachen Punkt G, zwei $(n-s_k)$-fache Punkte E, F und jeden nicht auf der Geraden $EF = f_{12}^k$ liegenden Punkt $F_{12}^k = f_k^1 f_k^2$ zum s_k-fachen Punkte. Diese vielfachen Punkte sind aber (s. die Beziehung II in Nr. 1) den

$$(9)\quad \begin{aligned} \vartheta_1 &= \tfrac{1}{2} n(n-1) + 2 \cdot \tfrac{1}{2} (n-s_k)(n-s_k-1) - \tfrac{1}{2} s_k(s_k-1) + \Sigma \tfrac{1}{2} s_k(s_k-1) \\ &= (n-1)^2 + (n-s_k)(n-s_k-1) - \tfrac{1}{2} s_k(s_k-1) \end{aligned}$$

[21]) A. Plamitzer, l. c. [18]), Nr. 5.

Doppelpunkten äquivalent. Daher ist die Plankurve K_1 von der Klasse $2(4n-2s_k-1)$ und vom Geschlecht $2n-s_k-1$. Folglich gilt:

Jede Ebene ω, welche eine s_k-fache Gerade $f_{12}^k = \varphi_k^1 \varphi_k^2$ der betrachteten Fläche Ψ enthält und durch den Scheitel W_0 des Bündels (W_0) nicht hindurchgeht, schneidet die Fläche Ψ in dieser s_k-fachen Geraden f_{12}^k und in einer Plankurve $(2n-s_k+1)$. Ordnung, $2(4n-2s_k-1)$. Klasse und $(2n-s_k-1)$. Geschlechts. Die Ebene ω schneidet die n-fache kubische Raumkurve S_{12}^3 der Fläche Ψ in einem n-fachen Punkte und in zwei auf der Bisekanten f_{12}^k liegenden $(n-s_k)$-fachen Punkten, ferner jede nicht auf ω liegende s_k-fache Gerade f_{12}^k (resp. einfache Gerade t_{012}') der Fläche Ψ in einem s_k-fachen (resp. einfachen) Punkte der ebenen Schnittkurve.

Enthält die Schnittebene ω eine einfache Gerade $t_{012}' = \tau_0' \tau_1' \tau_2'$ der Fläche Ψ und liegen die Punkte E, F der Raumkurve S_{12}^3 auf t_{012}', so zerfällt die Plankurve $(2n+1)$. Ordnung K in diese einfache Gerade t_{012}' und in eine Plankurve $2n$. Ordnung K_2. Sie hat einen n-fachen Punkt G, zwei $(n-1)$-fache Punkte E, F und jeden Punkt $F_{12}^k = f_k^1 f_k^2$ zum s_k-fachen Punkte. Da aber diese vielfachen Punkte den

$$(10)\quad \vartheta_2 = \tfrac{1}{2} n(n-1) + 2 \cdot \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) + \Sigma \tfrac{1}{2} s_k(s_k-1) = (n-1)(2n-3)$$

Doppelpunkten äquivalent sind, so ist K_2 eine Kurve $2(4n-3)$. Klasse und $2(n-1)$. Geschlechts. Daher gilt:

Jede Ebene ω, welche eine einfache Gerade $t_{012}' = \tau_0' \tau_1' \tau_2'$ der Fläche Ψ enthält und nicht durch den Scheitel W_0 des Bündels (W_0) hindurchgeht, schneidet die Fläche Ψ in dieser einfachen Geraden t_{012}' und in einer Plankurve $2n$. Ordnung, $2(4n-3)$. Klasse und $2(n-1)$. Geschlechts. Die Ebene ω schneidet die n-fache kubische Raumkurve S_{12}^3 der Fläche Ψ in einem n-fachen Punkte und in zwei auf der Bisekanten t_{012}' liegenden $(n-1)$-fachen Punkten, jede nicht auf ω liegende Gerade t_{012}' (resp. s_k-fache Gerade f_{12}^k) der Fläche Ψ in einem einfachen (resp. s_k-fachen) Punkte der ebenen Schnittkurve.

6. Fortsetzung. Nehmen wir jetzt an, daß die Schnittebene eine beliebige Ebene ω_0 des Bündels (W_0) ist. Um die Schnittkurve K der Fläche Ψ mit ω_0 zu bestimmen, betrachten wir einen auf ω_0 liegenden Strahlenbüschel $W_0(c_0, c_0', c_0'', \ldots)$ und konstruieren die Schnittpunkte der sämtlichen Geraden $c_0, c_0', c_0'', \ldots$ mit der Oberfläche Ψ. Z. B. dem Ebenenbüschel $c_0(\omega_0, \alpha_0, \beta_0 \ldots)$ entsprechen in den Bündeln (W_1), (W_2) zwei (Nr. 1) projektive Tangentialebenenbüschel

$$(5)\qquad \Gamma_1^n(\omega_1, \alpha_1, \beta_1, \ldots) \overline{\wedge} \Gamma_2^n(\omega_2, \alpha_2, \beta_2, \ldots),$$

welche (vgl. Nr. 2) eine in Nr. 4 genau betrachtete unikursale Regelfläche $2n$. Grades Γ erzeugen. Die Erzeugenden $w_{12} = \omega_1 \omega_2$, $a_{12} = \alpha_1 \alpha_2$, $b_{12} = \beta_1 \beta_2, \ldots$ dieser Regelfläche sind Strahlen der Bisekantenkongruenz K_{12} der Raumkurve S_{12}^3. Es folgt unmittelbar, daß die $2n$ Schnittpunkte der Achse c_0 des Büschels (c_0) mit der Regelfläche Γ der Oberfläche Ψ und der untersuchten Schnittkurve K angehören.

Den sämtlichen Geraden $c_0, c_0', \ldots$ des auf ω_0 liegenden Büschels (W_0) ordnen wir die auf diese Weise erhaltenen unikursalen Regelflächen $2n$. Grades $\Gamma, \Gamma', \ldots$ zu. Jeder Regelfläche, z. B. Γ, d. h. dem Erzeugnis der Ebenenbüschel $(\Gamma_1^n) \overline{\wedge} (\Gamma_2^n)$, entspricht im Bündel (W_0) der Ebenenbüschel (c_0) und dessen Achse c_0. Aus dieser so konstruierten Korrespondenz [1,1] zwischen den Elementen $c_0, c_0', \ldots$ und $\Gamma, \Gamma', \ldots$ folgt unmittelbar eine Korrespondenz [1,1] zwischen den Geraden $c_0, c_0', \ldots$ und den unikursalen Schnittkurven $2n$. Ordnung $C, C', \ldots$ dieser Regelflächen mit der Trägerebene α_0.

Da aber (vgl. Nr. 4) die kubische Raumkurve S_{12}^3 eine gemeinsame n-fache Kurve, jede Gerade $f_{12}^k = \varphi_k^1 \varphi_k^2$ eine gemeinsame s_k-fache Erzeugende und die Gerade $w_{12} = \omega_1 \omega_2$ eine gemeinsame einfache Erzeugende der Regelflächen $2n$. Grades $\Gamma, \Gamma', \ldots$ sind, so schneiden sich diese Regelflächen (s. die Beziehung I in Nr. 1) in einer Raumkurve von der Ordnung $3n^2 + \Sigma s_k^2 + 1 = 3n^2 + (n^2 - 1) + 1 = 4n^2$ und bilden daher einen Büschel. Die Plankurven $2n$. Ordnung $C, C', \ldots$ bilden auch einen Büschel. Die drei Schnittpunkte E, F, G der S_{12}^3 mit ω_0 sind n-fache Grundpunkte, jeder Punkt $F_{12}^k = f_{12}^k \omega_0$ ist ein s_k-facher und der Punkt $W_{12} = w_{12} \omega_0$ ein einfacher Grundpunkt dieses Büschels. Die Schnittpunkte homologer Elemente der projektiven Büschel $W_0(c_0, c_0', \ldots) \overline{\wedge} (C, C', \ldots)$ erzeugen eine Plankurve $(2n+1)$. Ordnung K, welche drei n-fache Punkte E, F, G, jeden Punkt F_{12}^k zum s_k-fachen Punkt und zwei einfache Punkte W_{12}, W_0 besitzt. Die Kurve K, welche der Fläche Ψ angehört, ist daher von der $2(4n-1)$. Klasse und vom $(2n-1)$. Geschlecht. — Es gilt daher folgender Satz:

Eine beliebige Ebene ω_0 des Bündels (W_0), die weder eine Hauptebene φ_i^0 ist, noch eine s_k-fache Gerade $f_{12}^k = \varphi_k^1 \varphi_k^2$ resp. eine einfache Gerade $t_{012}' = \tau_0' \tau_1' \tau_2'$ der betrachteten Fläche Ψ enthält, schneidet diese Fläche im allgemeinen längs einer Kurve $(2n+1)$. Ordnung, $2(4n-1)$. Klasse und $(2n-1)$. Geschlechts, welche im Scheitel W_0 des Bündels (W_0) einen einfachen Punkt besitzt. Die Ebene ω_0 schneidet die n-fache kubische Raumkurve S_{12}^3 der Fläche Ψ in drei n-fachen Punkten, jede s_k-fache Gerade f_{12}^k (resp. einfache Gerade t_{012}') der Fläche Ψ in einem s_k-fachen (resp. einfachen) Punkte der ebenen Schnittkurve.

Enthält die Schnittebene ω_0 den Scheitel W_0 des Bündels (W_0) und eine s_k-fache Gerade $f_{12}^k = \varphi_k^1 \varphi_k^2$ der Fläche Ψ, so schneidet ω_0 die Fläche Ψ in dieser s_k-fachen Geraden f_{12}^k und in einer Kurve K_1. Um sie zu bestimmen, betrachten wir noch einmal die unikursalen Regelflächen $2n$. Grades $\Gamma, \Gamma', \ldots$, welche einen Büschel bilden. Die Ebene ω_0 schneidet die Raumkurve S_{12}^3 in Punkten E, F, G (wo $EF = f_{12}^k$ ist) und die Regelflächen $\Gamma, \Gamma', \ldots$ in Kurven $(2n - s_k)$. Ordnung $C, C', \ldots$ Diese Plankurven besitzen aber folgende gemeinsamen Punkte: einen n-fachen Punkt G, zwei $(n - s_k)$-fache Punkte E, F, einen einfachen Punkt $W_{12} = \omega_0 \omega_1 \omega_2$ und jeden s_k-fachen Punkt im Schnittpunkte $F_{12}^k = f_{12}^k \omega_0$ der Trägerebene ω_0 mit jeder nicht in ω_0 liegenden Geraden f_{12}^k der Fläche Ψ. Diese Plankurven schneiden sich (s. die Beziehung I in Nr. 1) in

$$n^2 + 2(n - s_k)^2 + 1 - s_k^2 + \Sigma s_k^2 = (2n - s_k)^2$$

Punkten und bilden daher einen Büschel. Die projektiven Büschel $W_0(c_0, c_0', \ldots) \overline{\wedge} (C, C', \ldots)$ erzeugen eine Plankurve $(2n - s_k + 1)$. Ordnung K_1, welche einen n-fachen Punkt G, zwei $(n - s_k)$-fache Punkte E, F, zwei einfache Punkte W_0, W_{12} und jeden s_k-fachen Punkt $F_{12}^k = f_{12}^k \omega_0$ (wo f_{12}^k der Trägerebene ω_0 nicht angehört) enthält. Da aber diese vielfachen Punkte (s. die Relation (9) in Nr. 5) den ϑ_1 Doppelpunkten äquivalent sind, so ist die auf der Fläche Ψ liegende Kurve K_1 von der $2(4n - 2s_k - 1)$. Klasse und vom $(2n - s_k - 1)$. Geschlecht. Daher folgt:

Eine Ebene ω_0 des Bündels (W_0), welche eine s_k-fache Gerade $f_{12}^k = \varphi_k^1 \varphi_k^2$ der Fläche Ψ enthält, schneidet diese Fläche in dieser s_k-fachen Geraden f_{12}^k und in einer Plankurve $(2n - s_k + 1)$. Ordnung, $2(4n - 2s_k - 1)$. Klasse und $(2n - s_k - 1)$. Geschlechts. Die Ebene ω_0 schneidet die n-fache kubische Raumkurve S_{12}^3 der Fläche Ψ in einem n-fachen Punkte und in zwei auf der Bisekanten f_{12}^k liegenden $(n - s_k)$-fachen Punkten, jede nicht auf ω_0 liegende s_k-fache Gerade f_{12}^k (resp. einfache Gerade t_{012}') der Fläche Ψ in einem s_k-fachen (resp. einfachen) Punkte der ebenen Schnittkurve.

Enthält die Schnittebene ω_0 den Scheitel W_0 des Bündels (W_0) und eine einfache Gerade $t'_{012} = \tau'_0 \tau'_1 \tau'_2$ der Fläche Ψ, so schneidet $\omega_0 = \tau'_0$ die Fläche Ψ in dieser Geraden t'_{012} und in einer Kurve K_2. Die Ebene τ'_0 schneidet die Raumkurve S^3_{12} in Punkten E, F, G (wo $EF = t'_{012}$ ist) und die Regelflächen $2n$. Grades $\Gamma, \Gamma', \ldots$ in Kurven $(2n-1)$. Ordnung $C, C', \ldots$ Diese Plankurven besitzen folgende gemeinsamen Punkte: einen n-fachen G, zwei $(n-1)$-fache E, F und jeden s_k-fachen $F^k_{12} = f^k_{12} \tau'_0$. Diese Plankurven $(2n-1)$. Ordnung schneiden sich in $n^2 + 2(n-1)^2 + \Sigma s_k^2 = (2n-1)^2$ Punkten und bilden einen Büschel. Die projektiven Büschel $W_0(c_0, c'_0, \ldots) \barwedge (C, C', \ldots)$ erzeugen eine Plankurve $2n$. Ordnung K_2, welche die Grundpunkte des zweiten Büschels zu ebensolchen vielfachen Punkten besitzt. Da aber diese letzteren (vgl. die Relation (10) in Nr. 5) den $\vartheta_2 = (n-1)(2n-3)$ Doppelpunkten äquivalent sind, so ist die auf der Fläche Ψ liegende Plankurve K_2 von der Klasse $2(4n-3)$ und vom Geschlecht $2(n-1)$. Daher gilt:

Eine Ebene τ'_0 des Bündels (W_0), welche eine einfache Gerade $t'_{012} = \tau'_0 \tau'_1 \tau'_2$ der Fläche Ψ enthält, schneidet die Fläche Ψ in dieser einfachen Geraden t'_{012} und in einer Plankurve $2n$. Ordnung, $2(4n-3)$. Klasse und $2(n-1)$. Geschlechts. Die Ebene τ'_0 schneidet die n-fache kubische Raumkurve S^3_{12} der Fläche Ψ in einem n-fachen Punkte und in zwei auf der Bisekanten t'_{012} liegenden $(n-1)$-fachen Punkten, jede nicht auf τ'_0 liegende Gerade t'_{012} (resp. s_k-fache Gerade f^k_{12}) der Fläche Ψ in einem einfachen (resp. s_k-fachen) Punkte der ebenen Schnittkurve.

7. Weitere Plankurven der Fläche Ψ. Jetzt schneiden wir die Fläche Ψ mit einer r_i-fachen Hauptebene φ^0_i des Bündels (W_0). Dem Elemente φ^0_i entsprechen (Nr. 1) in den Bündeln (W_1), (W_2) zwei projektive Tangentialebenenbüschel $(\Phi^1_i) \barwedge (\Phi^2_i)$, deren Träger unikursale Fundamentalkegel r_i. Klasse Φ^1_i und Φ^2_i sind. Diese Büschel erzeugen [22]) eine unikursale Regelfläche $2r_i$. Grades und $2(2r_i-1)$. Ranges Φ^i, welche eine Doppelkurve von der Ordnung $\delta = \frac{1}{2}(2r_i-1)(2r_i-2)$ und zwei r_i-fache Punkte in den Scheiteln der Bündel (W_1), (W_2) besitzt. Da aber die Erzeugenden der Φ^i der Kongruenz K_{12} angehören und man je zwei beliebige Punkte der kubischen Raumkurve S^3_{12} (Nr. 4, Relation (7)) als Scheitel W_1, W_2 der Bündel $(W_1), (W_2)$ annehmen kann, so ist diese Raumkurve S^3_{12} eine *r_i-fache Kurve* der Regelfläche Φ^i. Eine Fundamentalkegelfläche Φ^1_i ist vollständig bestimmt (vgl. die Relation X in Nr. 1) durch die Multiplizitäten μ_{ik}, die sie in den Hauptebenen φ^1_k besitzt, und sie hat keine mehrfachen Tangentialebenen außerhalb der letzteren. Dasselbe gilt für die Hauptkegelfläche Φ^2_i. Daher ist jede Gerade $f^k_{12} = \varphi^1_k \varphi^2_k$ eine μ_{ik}-fache Erzeugende der Regelfläche Φ^i und zählt für $\frac{1}{2}\mu_{ik}(\mu_{ik}-1)$ Doppelerzeugende. Somit zählen alle μ_{ik}-fachen Erzeugenden f^k_{12}, $k = 1, 2, \ldots, \sigma$, der Regelfläche Φ^i (s. die Beziehung VII in Nr. 1) für $\sum\limits_k \frac{1}{2}\mu_{ik}(\mu_{ik}-1) = \frac{1}{2}(r_i-1)(r_i-2)$ Doppelerzeugende. Die Doppelkurve δ. Ordnung der Regelfläche Φ^i zerfällt daher in die r_i-fache kubische Raumkurve S^3_{12} und in alle μ_{ik}-fachen Erzeugenden f^k_{12}, denn es ist

$$3 \cdot \tfrac{1}{2} r_i(r_i-1) + \tfrac{1}{2}(r_i-1)(r_i-2) = \tfrac{1}{2}(2r_i-1)(2r_i-2) = \delta.$$

Die Hauptebene φ^0_i des Bündels (W_0) schneidet die unikursale Regelfläche $2r_i$. Grades und $2(2r_i-1)$. Ranges Φ^i in einer unikursalen Plankurve $2r_i$. Ordnung und $2(2r_i-1)$. Klasse F^i, welche der Oberfläche Ψ angehört. Die Ebene φ^0_i schneidet die kubische Raumkurve S^3_{12} in drei r_i-fachen Punkten und jede Erzeugende f^k_{12} in einem

[22]) A. Plamitzer, l. c. [19]).

μ_{ik}-fachen Punkte der Plankurve F^i. — Da jede r_i-fache Hauptebene φ_i^0 von den $2(n+2)$ Ebenen τ_0^i (s. Nr. 2) des Bündels (W_0) verschieden ist, so sind die Ebenen τ_1^i des Bündels (W_1) keine Tangentialebenen des Hauptkegels Φ_i^1 und die Geraden $t_{012}^i = \tau_0^i \tau_1^i \tau_2^i$ der Oberfläche Ψ keine Erzeugenden der Regelfläche Φ^i. Hieraus folgt: Diese Geraden t_{012}^i schneiden die Plankurve F^i gar nicht.

Die Hauptebene φ_i^0 schneidet die Fläche $(2n+1)$. Ordnung Ψ in dieser Kurve $2r_i$. Ordnung F^i und in einer Plankurve $(2n-2r_i+1)$. Ordnung K^i. Um die K^i zu bestimmen, betrachten wir den auf φ_i^0 liegenden Strahlenbüschel $W_0(c_0, c_0', \ldots)$. Z. B. entsprechen dem Ebenenbüschel $c_0(\varphi_i^0, \alpha_0, \beta_0, \ldots)$ (Nr. 1) in den Bündeln (W_1), (W_2) zwei projektive Tangentialebenenbüschel $(\Gamma_1) \overline{\wedge} (\Gamma_2)$, deren Träger unikursale Kegelflächen $(n-r_i)$. Klasse Γ_1 und Γ_2 sind. Jede s_k-fache Hauptebene φ_k^1 des Bündels (W_1) ist (Nr. 1) eine $(s_k-\mu_{ik})$-fache Tangentialebene des Kegels Γ_1 und zählt für $\frac{1}{2}(s_k-\mu_{ik})(s_k-\mu_{ik}-1)$ Doppeltangentialebenen. Somit zählen alle $(s_k-\mu_{ik})$-fachen Tangentialebenen φ_k^1, $k=1,2,\ldots\sigma$, des unikursalen Kegels $(n-r_i)$. Klasse Γ_1 (s. die Beziehungen XI, III, IX in Nr. 1) für

$$(11)\quad \delta_1 = \sum_k \tfrac{1}{2}(s_k-\mu_{ik})(s_k-\mu_{ik}-1) = \tfrac{1}{2}\sum_k (s_k-\mu_{ik})^2 - \tfrac{1}{2}\sum_k s_k + \tfrac{1}{2}\sum_k \mu_{ik}$$
$$= \tfrac{1}{2}(n-r_i)^2 - \tfrac{1}{2}\cdot 3(n-1) + \tfrac{1}{2}(3r_i-1) = \tfrac{1}{2}(n-r_i-1)(n-r_i-2)$$

Doppeltangentialebenen. Dasselbe gilt für den Kegel Γ_2. Die projektiven Büschel $(\Gamma_1) \overline{\wedge} (\Gamma_2)$ erzeugen [23]) eine unikursale Regelfläche $2(n-r_i)$. Grades und $2(2n-2r_i-1)$. Ranges Γ, deren Doppelkurve von der Ordnung

$$\tfrac{1}{2}(2n-2r_i-1)(2n-2r_i-2)$$

in alle $(s_k-\mu_{ik})$-fachen Erzeugenden $f_{12}^k = \varphi_k^1 \varphi_k^2$ und (ganz analog wie oben für die Regelfläche Φ^i) in eine $(n-r_i)$-fache kubische Raumkurve S_{12}^3 zerfällt. — Es folgt unmittelbar, daß die $2(n-r_i)$ Schnittpunkte der Achse c_0 mit der Regelfläche Γ der Oberfläche Ψ und der untersuchten Schnittkurve K^i angehören.

Den sämtlichen Geraden $c_0, c_0', \ldots$ des auf φ_i^0 liegenden Büschels (W_0) ordnen wir die auf diese Weise erhaltenen unikursalen Regelflächen $2(n-r_i)$. Grades $\Gamma, \Gamma', \ldots$ zu. Jeder Regelfläche, z. B. Γ, d. h. dem Erzeugnis der Ebenenbüschel $(\Gamma_1) \overline{\wedge} (\Gamma_2)$, entspricht im Bündel (W_0) der Ebenenbüschel (c_0) und dessen Achse c_0. Aus dieser Korrespondenz [1,1] zwischen den Elementen $c_0, c_0', \ldots$ und $\Gamma, \Gamma', \ldots$ folgt unmittelbar eine Korrespondenz [1,1] zwischen den Geraden $c_0, c_0', \ldots$ und den unikursalen Schnittkurven $2(n-r_i)$. Ordnung $C, C', \ldots$ der Regelflächen $\Gamma, \Gamma', \ldots$ mit der Trägerebene φ_i^0.

Da aber die kubische Raumkurve S_{12}^3 eine gemeinsame $(n-r_i)$-fache Kurve und jede Gerade $f_{12}^k = \varphi_k^1 \varphi_k^2$ eine gemeinsame $(s_k-\mu_{ik})$-fache Erzeugende der Regelflächen $2(n-r_i)$. Grades $\Gamma, \Gamma', \ldots$ ist, so schneiden sich diese Regelflächen (s. die Beziehung XI in Nr. 1) in einer Raumkurve von der Ordnung

$$3(n-r_i)^2 + \sum_k (s_k-\mu_{ik})^2 = 3(n-r_i)^2 + (n-r_i)^2 = 4(n-r_i)^2.$$

Daher bilden diese Regelflächen und ebenso die Schnittkurven $2(n-r_i)$. Ordnung $C, C', \ldots$ einen Büschel. Die drei Schnittpunkte E, F, G der S_{12}^3 mit der Trägerebene φ_i^0 sind $(n-r_i)$-fache Grundpunkte, und jeder Punkt $F_{12}^k = f_{12}^k \varphi_i^0$ ist ein $(s_k-\mu_{ik})$-facher Grundpunkt des letzteren Büschels. Homologe Elemente der projektiven Büschel $W_0(c_0, c_0', \ldots) \overline{\wedge} (C, C', \ldots)$ schneiden sich in Punkten einer Plankurve K^i der Ordnung $2n-2r_i+1$, welche drei $(n-r_i)$-fache Punkte E, F, G, jeden Punkt F_{12}^k zum $(s_k-\mu_{ik})$-

[23]) A. Plamitzer, l. c. [19]).

fachen Punkte und einen einfachen Punkt W_0 besitzt. Diese vielfachen Punkte sind (s. oben die Relation 11) den

$$3 \cdot \tfrac{1}{2}(n-r_i)\,(n-r_i-1) + \delta_1 = \tfrac{1}{2}(2n-2r_i-1)\,(2n-2r_i-2)$$

Doppelpunkten äquivalent. Die Plankurve K^i, welche der Oberfläche Ψ angehört, ist daher von $2(4n-4r_i-1)$. Klasse und $(2n-2r_i-1)$. Geschlecht.

Die r_i-fache Hauptebene φ_i^0 schneidet jede von den $2(n+2)$ Ebenen τ_0^i (s. Nr. 2) des Bündels (W_0) in je einer Geraden $c_0 = \varphi_i^0 \tau_0^i$. Homologe Ebenen τ_1^i, τ_2^i der Bündel (W_1) resp. (W_2) sind Tangentialebenen der betrachteten Kegel Γ_1 resp. Γ_2, die Gerade $t_{012}^i = \tau_0^i \tau_1^i \tau_2^i$ der Fläche Ψ ist eine Erzeugende der Regelfläche Γ, und der Schnittpunkt $c_0 t_{012}^i$ liegt auf der untersuchten Plankurve K^i. Daher treffen die $2(n+2)$ Geraden t_{012}^i der Fläche Ψ je einmal diese Plankurve K^i. — Es gelten folgende Sätze:

Jede r_i*-fache Hauptebene* φ_i^0 *des Bündels* (W_0) *schneidet die betrachtete Fläche* Ψ *in einer unikursalen Kurve* $2r_i$*. Ordnung,* $2(2r_i-1)$*. Klasse* F^i *und in einer Kurve* $(2n-2r_i+1)$*. Ordnung,* $2(4n-4r_i-1)$*. Klasse,* $(2n-2r_i-1)$*. Geschlechts* K^i*. Im Scheitel* W_0 *des Bündels* (W_0) *besitzt die Kurve* K^i *einen einfachen Punkt. Jeder Schnittpunkt der n-fachen kubischen Raumkurve* S_{12}^3 *der Fläche* Ψ *mit der Trägerebene* φ_i^0 *ist ein* r_i*-facher Punkt der* F^i *und ein* $(n-r_i)$*-facher Punkt der* K^i*. Der Schnittpunkt jeder* s_k*-fachen Geraden* $f_{12}^k = \varphi_k^1 \varphi_k^2$ *der Fläche* Ψ *mit der Trägerebene* φ_i^0 *ist ein* μ_{ik}*-facher Punkt der* F^i *und ein* $(s_k-\mu_{ik})$*-facher Punkt der* K^i*. Die* $2(n+2)$ *einfachen Geraden* $t_{012}^i = \tau_0^i \tau_1^i \tau_2^i$ *der Fläche* Ψ *schneiden nicht die Plankurve* F^i *und treffen je einmal die Plankurve* K^i*.*

Anmerkung. Im Falle der Jonquièresschen Verwandtschaften n. Grades (s. Nr. 1) gelten für

a) $r_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots, 2n-2$;

b) $r_h = n-1$, $h = 1$ und $s_k = n-1$, $k = 1$, resp. $s_k = 1$, $k = 1, 2, \ldots, 2n-2$,

folgende Sätze:

Jede von den $2(n-1)$ *einfachen* Hauptebenen φ_i^0 des Bündels (W_0) schneidet die Fläche Ψ in einem Kegelschnitte F^i und in einer Kurve $(2n-1)$. Ordnung, $2(4n-5)$. Klasse, $(2n-3)$. Geschlechts K^i, welche einen einfachen Punkt im Scheitel des Bündels (W_0) besitzt. Jeder Schnittpunkt der n-fachen kubischen Raumkurve S_{12}^3 der Fläche Ψ mit der Trägerebene φ_0 ist ein einfacher Punkt des Kegelschnittes F^i und ein $(n-1)$-facher Punkt der Plankurve K^i. Der Schnittpunkt einer einzigen $(n-1)$-fachen Geraden $f_{12}^{n-1} = \varphi_{n-1}^1 \varphi_{n-1}^2$ der Fläche Ψ mit der Trägerebene φ_i^0 ist ein einfacher Punkt des Kegelschnittes F^i und ein $(n-2)$-facher Punkt der Kurve K^1. — Sind φ^1 und φ^2 die Hauptebenen der Bündel (W_1), (W_2), welche der auf der Trägerebene φ_i^0 liegenden Hauptgeraden f^0 des Bündels (W_0) entsprechen, so trifft die einfache Gerade $f_{12} = \varphi^1 \varphi^2$ der Fläche Ψ einmal den Kegelschnitt F^i und schneidet nicht die Plankurve K^i. Die weiteren $2n-3$ einfachen Geraden $f_{12}^k = \varphi_k^1 \varphi_k^2$ und die $2(n+2)$ einfachen Geraden $t_{012}^i = \tau_0^i \tau_1^i \tau_2^i$ der Fläche Ψ schneiden nicht den Kegelschnitt F^i und treffen je einmal die Plankurve K^i.

Die einzige $(n-1)$-*fache Hauptebene* φ_h^0 des Bündels (W_0) schneidet die Fläche Ψ in einer unikursalen Kurve $2(n-1)$. Ordnung, $2(2n-3)$. Klasse F^h und in einer allgemeinen Kurve 3. Ordnung, 6. Klasse, 1. Geschlechts K^h, welche im Scheitel

des Bündels (W_0) einen einfachen Punkt besitzt. Jeder Schnittpunkt der n-fachen kubischen Raumkurve S_{12}^3 der Fläche Ψ mit der Tägerebene φ_h^0 ist ein $(n-1)$-facher Punkt der F^h und ein einfacher Punkt der K^h. Der Schnittpunkt der einzigen $(n-1)$-fachen Geraden $f_{12}^{n-1} = \varphi_{n-1}^1 \varphi_{n-1}^2$ der Fläche Ψ mit der Trägerebene φ_h^0 ist ein $(n-2)$-facher Punkt der F^h und ein einfacher Punkt der K^h. Die $2(n-1)$ einfachen Geraden $f_{12}^k = \varphi_k^1 \varphi_k^2$ der Fläche Ψ treffen je einmal die Plankurve F^h und schneiden nicht die K^h. Die $2(n+2)$ einfachen Geraden $t_{012}^i = \tau_0^i \tau_1^i \tau_2^i$ der Fläche Ψ schneiden nicht die F^h und treffen je einmal die Plankurve K^h.

Betrachten wir jetzt zwei Hauptebenen φ_i^0 und φ_l^0 des Bündels (W_0). Die r_i-fache Ebene φ_i^0 schneidet die Fläche Ψ in einer Kurve $2r_i$. Ordnung F^i und in einer Kurve $(2n-2r_i+1)$. Ordnung K^i. Die r_l-fache Hauptebene φ_l^0 schneidet Ψ in einer Kurve $2r_l$. Ordnung F^l und in einer Kurve $(2n-2r_l+1)$. Ordnung K^l.

Dem Ebenenbüschel (c_0), wo c_0 eine beliebige auf φ_i^0 liegende Gerade des Bündels (W_0) ist, entsprechen in den Bündeln (W_1), (W_2) zwei Paare projektiver Tangentialebenenbüschel $(\Phi_i^1) \barwedge (\Phi_i^2)$ und $(\Gamma_1) \barwedge (\Gamma_2)$, deren Träger die Fundamentalkegel r_i. Klasse Φ_i^1, Φ_i^2 bzw. die Kegel $(n-r_i)$. Klasse Γ_1, Γ_2 sind. Diese Büschel erzeugen (s. oben) eine Regelfläche $2r_i$. Grades Φ^i und eine Regelfläche $2(n-r_i)$. Grades Γ. Die Schnittpunkte der Achse c_0 mit Φ^i liegen auf der Kurve F^i, und die von c_0 mit Γ liegen auf der Kurve K^i.

Dem Ebenenbüschel (d_0), wo d_0 eine beliebige auf φ_l^0 liegende Gerade des Bündels (W_0) ist, entsprechen ganz analog die Büschel $(\Phi_l^1) \barwedge (\Phi_l^2)$ und $(\Delta_1) \barwedge (\Delta_2)$, welche eine Regelfläche $2r_l$. Grades Φ^l und eine Regelfläche $2(n-r_l)$. Grades Δ erzeugen. Die Achse d_0 schneidet Φ^l in $2r_l$ Punkten der Kurve F^l und Δ in $2(n-r_l)$ Punkten der Kurve K^l.

Schneiden sich die Hauptebenen φ_i^0 und φ_l^0 in der Geraden $c_0 = \varphi_i^0 \varphi_l^0$, so entsprechen dem Ebenenbüschel (c_0) folgende Büschel: $(\Phi_i^1) \barwedge (\Phi_i^2)$, $(\Phi_l^1) \barwedge (\Phi_l^2)$ und $(\Gamma_1') \barwedge (\Gamma_2')$. Die letzteren Büschel, deren Träger unikursale Kegel $(n-r_i-r_l)$. Klasse Γ_1' und Γ_2' sind, erzeugen eine unikursale Regelfläche $2(n-r_i-r_l)$. Grades Γ'. Die Regelfläche Γ zerfällt daher in Φ^l und Γ', und da die Gerade $d_0 = c_0$ ist, zerfällt die Regelfläche Δ in Φ^i und Γ'. Es folgt unmittelbar: Die Achse c_0 schneidet die Regelflächen Φ^l und Γ' in $2r_l$ resp. $2(n-r_i-r_l)$ Punkten, welche der Plankurve K^i angehören. Analog schneidet die Achse $d_0 = c_0$ die Regelflächen Φ^i und Γ' in $2r_i$ resp. $2(n-r_i-r_l)$ Punkten, welche der Kurve K^l angehören. Daher schneiden sich die Kurven K^i und K^l im Scheitel W_0 des Bündels (W_0) und in $2(n-r_i-r_l)$ Punkten der Geraden $c_0 = d_0$. — Da aber die $2r_i$ Schnittpunkte von c_0 mit Φ^i gleichzeitig auf der Plankurve F^i liegen, so schneiden sich die Kurven F^i und K^l in $2r_i$ Punkten auf der Geraden $c_0 = d_0$. Ebenso schneiden sich F^l und K^i in $2r_l$ Punkten auf der Geraden $c_0 = d_0$. Daher gilt:

Schneidet eine r_i-fache Hauptebene φ_i^0 des Bündels (W_0) die Fläche Ψ in einer Kurve $2r_i$. Ordnung F^i und in einer Kurve $(2n-2r_i+1)$. Ordnung K^i, und schneidet eine zweite r_l-fache Hauptebene φ_l^0 dieses Bündels die Fläche Ψ in einer Kurve $2r_l$. Ordnung F^l und in einer Kurve $(2n-2r_l+1)$. Ordnung K^l, so schneiden sich auf der Geraden $\varphi_i^0 \varphi_l^0$

folgende Plankurven: a) F^i *und* K^l *in* $2r_i$ *Punkten*, b) F^l *und* K^i *in* $2r_l$ *Punkten*, c) K^i *und* K^l *im Scheitel* W_0 *des Bündels* (W_0) *und in* $2(n-r_i-r_l)$ *Punkten. Die Kurven* F^i *und* F^l *dagegen besitzen im allgemeinen keine gemeinsamen Schnittpunkte.*

8. Unikursale Raumkurven C der Fläche Ψ. Betrachten wir jetzt eine *unikursale Kegelfläche* ν. Klasse Γ_0^ν, welche den Scheitel im Punkte W_0 und jede r_i-fache Hauptebene φ_i^0 des Bündels (W_0) zur l_i-fachen Tangentialebene hat. Sind die Ebenen τ_0' (Nr. 2) dieses Bündels, welche resp. durch einfache Geraden t_{012}' der Fläche Ψ hindurchgehen, keine Tangentialebenen des Kegels Γ_0^ν, so gilt bekanntlich

$$\sum_i \tfrac{1}{2} l_i(l_i-1) \leqq \tfrac{1}{2}(\nu-1)(\nu-2).$$

Außer den Hauptebenen φ_i^0 besitzt Γ_0^ν noch weitere vielfache Tangentialebenen, welche den

$$\delta = \tfrac{1}{2}(\nu-1)(\nu-2) - \sum_i l_i(l_i-1) \tag{12}$$

Doppeltangentialebenen äquivalent sind. Dem unikursalen Kegel Γ_0^ν entspricht (Nr. 1) im Bündel (W_1) eine Kegelfläche Γ_1^ε von der Klasse $\varepsilon = \nu n - \sum_i l_i r_i$, für welche jede s_k-fache Hauptebene φ_k^1 des Bündels (W_1) eine $(\nu s_k - \sum_i l_i \mu_{ik}) = \lambda_k$-fache Tangentialebene ist. Die weiteren vielfachen Tangentialebenen des Kegels Γ_1^ε sind den δ Doppeltangentialebenen äquivalent. Alle vielfachen Tangentialebenen des Kegels Γ_1^ε zählen daher für $\vartheta = \frac{1}{2}(\varepsilon-1)(\varepsilon-2)$ Doppeltangentialebenen, denn es gelten (s. die Relationen III, V, I, VI und IX in Nr. 1) folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned}\sum_k (\sum_i l_i \mu_{ik})^2 &= \sum_k (\sum_i l_i^2 \mu_{ik}^2 + \sum_{i\neq h} l_i l_h \mu_{ik}\mu_{hk}) = \sum_i l_i^2 \sum_k \mu_{ik}^2 + \sum_{i\neq h} l_i l_h \sum_k \mu_{ik}\mu_{hk} \\ &= \sum_i l_i^2(r_i^2+1) + \sum_{i\neq h} l_i l_h r_i r_h = \sum_i l_i^2 + (\sum_i l_i r_i)^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vartheta &= \delta + \sum_k \tfrac{1}{2}\lambda_k(\lambda_k-1) = \delta + \sum_k \tfrac{1}{2}(\nu s_k - \sum_i l_i\mu_{ik})(\nu s_k - \sum_i l_i\mu_{ik} - 1) \\ &= \delta + \tfrac{1}{2}\sum_k [\nu^2 s_k^2 - 2\nu s_k \sum_i l_i\mu_{ik} + (\sum_i l_i\mu_{ik})^2 - \nu s_k + \sum_i l_i\mu_{ik}] \\ &= \tfrac{1}{2}(\nu-1)(\nu-2) - \tfrac{1}{2}\sum_i l_i(l_i-1) + \tfrac{1}{2}\nu^2\sum_k s_k^2 - \nu\sum_i l_i\sum_k s_k\mu_{ik} + \tfrac{1}{2}\sum_k(\sum_i l_i\mu_{ik})^2 - \tfrac{1}{2}\nu\sum_k s_k + \tfrac{1}{2}\sum_i l_i\sum_k \mu_{ik} \\ &= \tfrac{1}{2}\nu^2 - \tfrac{3}{2}\nu + 1 - \tfrac{1}{2}\sum_i l_i^2 + \tfrac{1}{2}\sum_i l_i + \tfrac{1}{2}\nu^2(n^2-1) - \nu\sum_i l_i n r_i + \tfrac{1}{2}\sum_i l_i^2 + \tfrac{1}{2}(\sum_i l_i r_i)^2 - \tfrac{1}{2}\nu(3n-3) + \tfrac{1}{2}\sum_i l_i(3r_i-1) \\ &= \tfrac{1}{2}\nu^2 n^2 - \nu n\sum_i l_i r_i + \tfrac{1}{2}(\sum_i l_i r_i)^2 - \tfrac{3}{2}\nu n + \tfrac{3}{2}\sum_i l_i r_i + 1 = \tfrac{1}{2}(\nu n - \sum_i l_i r_i)^2 - \tfrac{3}{2}(\nu n - \sum_i l_i r_i) + 1 \\ &= \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 - \tfrac{3}{2}\varepsilon + 1 = \tfrac{1}{2}(\varepsilon-1)(\varepsilon-2).\end{aligned} \tag{13}$$

Daher ist der Kegel Γ_1^ε vom Geschlecht 0 (unikursal).

Aus den Relationen (s. die Beziehungen I, VI, V und VIII in Nr. 1)

$$\begin{aligned}\varepsilon n - \sum_k \lambda_k s_k &= \varepsilon n - \sum_k (\nu s_k - \sum_i l_i\mu_{ik})\, s^k = (\nu n - \sum_i l_i r_i)n - \nu\sum_k s_k^2 + \sum_i l_i \sum_k s_k \mu_{ik} \\ &= \nu n^2 - n\sum_i l_i r_i - \nu(n^2-1) + \sum_i l_i n r_i = \nu,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_k \sum_h l_i \mu_{hk}\mu_{ik} &= \sum_h l_h \sum_k \mu_{hk}\mu_{ik} = \sum_{h\neq i} l_h \sum_k \mu_{hk}\mu_{ik} + l_i \sum_k \mu_{hk}^2 \\ &= \sum_{h\neq i} l_h r_h r_i + l_i(r_h^2+1) = \sum_h l_h r_h r_i + l_i = r_i \sum_h l_h r_h + l_i,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon r_i - \sum_k \lambda_k \mu_{ik} &= \varepsilon r_i - \sum_k (\nu s_k - \sum_i l_i\mu_{ik})\mu_{ik} = (\nu n - \sum_i l_i r_i) r_i - \nu\sum_k s_k\mu_{ik} + \sum_k\sum_h l_h \mu_{hk}\mu_{ik} \\ &= \nu n r_i - r_i\sum_h l_h r_h - \nu n r_i + r_i\sum_h l_h r_h + l_i = l_i\end{aligned} \tag{14}$$

folgt unmittelbar: Dem unikursalen Kegel Γ_1^ε entspricht reziprok (Nr. 1) im Bündel (W_0) die unikursale Kegelfläche Γ_0^ν von der Klasse $\varepsilon n - \sum_k \lambda_k s_k = \nu$, für welche jede

r_i-fache Hauptebene φ_i^0 des Bündels (W_0) eine $\varepsilon r_i - \sum_k \lambda_k \mu_{ik} = l_i$-fache Tangentialebene ist.

Dem unikursalen Kegel Γ_0^ε entspricht im Bündel (W_2) ganz analog eine unikursale Kegelfläche ε. Klasse Γ_2^ε, für welche jede s_k-fache Hauptebene φ_k^2 des Bündels (W_2) eine λ_k-fache Tangentialebene ist. Die weiteren vielfachen Tangentialebenen des Kegels Γ_2^ε sind (vgl. die Relation (12)) den δ Doppeltangentialebenen äquivalent.

Es soll noch bemerkt werden, daß die unikursalen Kegel Γ_1^ε und Γ_2^ε homologe Flächen der kollinearen Bündel $(W_1)\,\varkappa\,(W_2)$ sind. Vermittelst der Relation (7) in Nr. 4 erhalten wir in den Bündeln (W_1^*), (W_2^*), ... noch weitere unikursale Kegelflächen $\Gamma_1^{*\varepsilon}$, $\Gamma_2^{*\varepsilon}$, ... von der Klasse ε. Aus der Relation (4) in Nr. 2 ergibt sich sofort die Projektivität

$$\Gamma_0^\nu(\alpha_0, \beta_0, \ldots) \wedge \Gamma_1^\varepsilon(\alpha_1, \beta_1, \ldots) \wedge \Gamma_2^\varepsilon(\alpha_2, \beta_2, \ldots) \tag{15}$$

zwischen den Tangentialebenenbüscheln, deren Träger unikursale Kegelflächen Γ_0^ν, Γ_1^ε und Γ_2^ε sind. *Diese Büschel erzeugen* [24]) *als Ort der Schnittpunkte homologer Ebenen eine* — auf der betrachteten Fläche Ψ liegende — *unikursale Raumkurve C von der Ordnung* $\nu(2n+1) - 2\Sigma l_i r_i$, *von der Klasse* $3\nu(2n+1) - 6 - \Sigma l_i r_i$ *und vom Rang* $2\nu(2n+1) - 2 - 4\Sigma l_i r_i$. *Diese Raumkurve C besitzt vielfache Punkte, welche den* $\delta = \frac{1}{2}(\nu-1)(\nu-2) - \frac{1}{2}\Sigma l_i(l_i-1)$ *Doppelpunkten äquivalent sind, und*

$$\delta_0 = (\nu n - \Sigma l_i r_i)(2\nu n + 2\nu - 3 - 2\Sigma l_i r_i) + \tfrac{1}{2}\Sigma l_i(l_i-1)$$

scheinbare Doppelpunkte.

Jede Hauptebene φ_i^0 des Bündels (W_0) ist (Nr. 1) eine μ_{ik}-fache Tangentialebene des Hauptkegels s_k. Klasse Φ_k^0 und eine l_i-fache Tangentialebene des Kegels Γ_0^ν. Außer den Hauptebenen besitzen diese Kegel noch $\nu s_k - \sum_i l_i \mu_{ik}$ gemeinsame Tangentialebenen $\beta_0, \cdots$. Da aber jeder Ebene β_0 die Hauptebenen φ_k^1, φ_k^2 entsprechen, so liegt der Schnittpunkt $B = \beta_0 \varphi_k^1 \varphi_k^2 = \beta_0 f_{12}^k$ auf der Raumkurve C. Daher gilt:

Jede s_k*-fache Gerade* f_{12}^k *der Fläche* Ψ *ist eine* $(\nu s_k - \sum_i l_i \mu_{ik})$*-fache Sekante der betrachteten Raumkurve C.*

Jede Hauptebene φ_k^1 des Bündels (W_1) ist (Nr. 1) eine μ_{ik}-fache Tangentialebene des Hauptkegels r_i. Klasse Φ_i^1 und eine λ_k-fache Tangentialebene des Kegels Γ_1^ε. Außer den Hauptebenen besitzen diese Kegel (s. die Relation (14)) noch $\varepsilon r_i - \sum_k \lambda_k \mu_{ik} = l_i$ gemeinsame Tangentialebenen $\alpha_1, \ldots$ Homologe Ebenen $\alpha_2, \ldots$ des Bündels (W_2) sind gemeinsame Tangentialebenen der Kegelflächen Φ_i^2 und Γ_2^ε. Da aber diesen Ebenen die Hauptebene φ_i^0 des Bündels (W_0) entspricht, so liegen die Schnittpunkte $A = \varphi_i^0 \alpha_1 \alpha_2 = \varphi_i^0 a_{12}, \ldots$ auf der Raumkurve C. Die Geraden $a_{12} = \alpha_1 \alpha_2, \ldots$ sind Erzeugende (Nr. 7) der Regelfläche $2r_i$. Grades Φ^i, und die Punkte $A, \ldots$ liegen auf der Kurve $2r_i$. Ordnung F^i. Die Kurven C und F^i besitzen daher l_i gemeinsame Punkte $A, \ldots$ Außer diesen liegen aber auf der Hauptebene φ_i^0 noch weitere $\nu(2n+1) - l_i - 2\sum_i l_i r_i$ Punkte der Raumkurve C. Diese letzteren müssen als Punkte der Fläche Ψ (Nr. 7) auf der Plankurve K^i liegen. Daher gilt:

Die auf der r_i*-fachen Hauptebene* φ_i^0 *des Bündels* (W_0) *liegenden Plankurven* $2r_i$*. Ordnung* F^i *und* $(2n - 2r_i + 1)$*. Ordnung* K^i *der Fläche* Ψ *treffen* l_i*-mal resp.*

---

[24]) A. Plamitzer, l. c. [19]) (II. Mitteilung), Nr. 40—43.

$[\nu(2n+1) - l_i - 2\Sigma l_i r_i]$*-mal die auf* Ψ *liegende unikursale Raumkurve* C *von der Ordnung* $\nu(2n+1) - 2\Sigma l_i r_i$.

Die projektiven Büschel $(\Gamma_1^\varepsilon) \wedge (\Gamma_2^\varepsilon)$, welche der Relation (15) genügen, erzeugen [25]) eine unikursale Regelfläche Γ_{12} vom Grade $2\varepsilon = 2(\nu n - \Sigma l_i r_i)$ und vom Rang $2(2\varepsilon - 1)$, mit einer Doppelkurve von der Ordnung $\frac{1}{2}(2\varepsilon - 1)(2\varepsilon - 2)$. Diese Doppelkurve zerfällt (ganz analog wie in Nr. 4 für die Regelfläche Γ) in eine ε-fache kubische Raumkurve S_{12}^3, in alle λ_k-fachen Erzeugenden $f_{12}^k = \varphi_k^1 \varphi_k^2$ und in weitere vielfache Erzeugende, welche (s. die Relationen (12), (13)) den δ Doppelerzeugenden äquivalent sind, denn es ist $3 \cdot \frac{1}{2}\varepsilon(\varepsilon - 1) + \vartheta = \frac{1}{2}(2\varepsilon - 1)(2\varepsilon - 2)$. Die Erzeugenden $a_{12} = \alpha_1 \alpha_2$, $b_{12} = \beta_1 \beta_2, \ldots$ der Regelfläche Γ_{12} sind Bisekanten der Raumkurve S_{12}^3.

Aus der Relation (15) ergibt sich die Projektivität

$$\Gamma_0^\nu(\alpha_0, \beta_0, \ldots) \barwedge \Gamma_{12}(a_{12}, b_{12}, \ldots) \tag{16}$$

zwischen den Tangentialebenen $\alpha_0, \beta_0, \ldots$ des unikursalen Kegels Γ_0^ν und den Erzeugenden $a_{12}, b_{12}, \ldots$ der unikursalen Regelfläche Γ_{12}. *Das Erzeugnis dieser Gebilde ist* [26]) *die oben betrachtete Raumkurve* C von der Ordnung $\nu(2n+1) - 2\Sigma l_i r_i$, als Ort der Schnittpunkte $A = \alpha_0 a_{12}$, $B = \beta_0 b_{12}, \ldots$

Sind die unikursalen Kegel $\Gamma_1^\varepsilon, \Gamma_2^\varepsilon, \Gamma_1^{*\varepsilon}, \Gamma_2^{*\varepsilon}$ homologe Flächen der kollinearen Bündel, welche der Relation (7) in Nr. 4 genügen, so schneiden sich homologe Tangentialebenen dieser Kegel in Erzeugenden $a_{12} = \alpha_1 \alpha_2 = \alpha_1^* \alpha_2^*$, $b_{12} = \beta_1 \beta_2 = \beta_1^* \beta_2^*, \ldots$ der Regelfläche Γ_{12}. Aus (15) und (16) folgt unmittelbar die Projektivität

$$\Gamma_0^\nu(\alpha_0, \beta_0, \ldots) \barwedge \Gamma_1^{*\varepsilon}(\alpha_1^*, \beta_1^*, \ldots) \barwedge \Gamma_2^{*\varepsilon}(\alpha_2^*, \beta_2^*, \ldots), \tag{17}$$

und die Schnittpunkte $A = \alpha_0 \alpha_1^* \alpha_2^* = \alpha_0 a_{12}, \ldots$ *liegen auf der unikursalen Raumkurve* C.

Die projektiven Tangentialebenenbüschel

$$(\Gamma_0^\nu) \barwedge (\Gamma_1^\varepsilon), \quad (\Gamma_0^\nu) \barwedge (\Gamma_2^\varepsilon), \quad (\Gamma_0^\nu) \barwedge (\Gamma_1^{*\varepsilon}), \quad (\Gamma_0^\nu) \barwedge (\Gamma_2^{*\varepsilon}),$$

welche den Relationen (15) und (17) genügen, erzeugen [25]) unikursale Regelflächen $\Gamma_{01}, \Gamma_{02}, \Gamma_{01}^*, \Gamma_{02}^*$ vom Grade $\nu + \varepsilon = \nu(n+1) - \sum_i l_i r_i$ und vom Rang $2(\varepsilon + \nu - 1) = 2(\nu n + \nu - 1 - \sum_i l_i r_i)$. Aus (15) und (16) ergeben sich sofort die Projektivitäten, z. B.

$$\Gamma_{01}(a_{01}, b_{01}, \ldots) \barwedge \Gamma_2^\varepsilon(\alpha_2, \beta_2, \ldots) \text{ und } \Gamma_{02}^*(a_{02}^*, b_{02}^*, \ldots) \barwedge \Gamma_1^{*\varepsilon}(\alpha_1^*, \beta_1^*, \ldots),$$

zwischen den Erzeugenden $a_{01} = \alpha_0 \alpha_1$, $b_{01} = \beta_0 \beta_1, \ldots$ der Regelfläche Γ_{01} und den Tangentialebenen $\alpha_2, \beta_2, \ldots$ des Kegels Γ_2^ε, resp. zwischen den Erzeugenden $a_{02}^* = \alpha_0 \alpha_2^*, \ldots$ der Regelfläche Γ_{02}^* und den Tangentialebenen $\alpha_1^*, \beta_1^*, \ldots$ des Kegels $\Gamma_1^{*\varepsilon}$. *Homologe Elemente dieser Gebilde schneiden sich* [26]) *in Punkten*

$$A = a_{01} \alpha_2 = \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2, \qquad B = b_{01} \beta_2 = \beta_0 \beta_1 \beta_2, \ldots$$

$$\text{resp. } A = a_{02}^* \alpha_1^* = \alpha_0 \alpha_2^* \alpha_1^* = \alpha_0 a_{12} = \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2, \quad B = b_{02}^* \beta_1^* = \beta_0 \beta_1 \beta_2, \ldots$$

der unikursalen Raumkurve C.

Aus den bisherigen Betrachtungen folgt unmittelbar:

Die unikursalen Regelflächen $\Gamma_{12}, \Gamma_{01}, \Gamma_{02}, \Gamma_{01}^*, \Gamma_{02}^*, \ldots$ *gehen durch die unikursale Raumkurve* C *der Fläche* Ψ *hindurch. Jede Tagentialebene* α_0 *des unikursalen*

---

[25]) A. Plamitzer, l. c. [19]) (I. Mitteilung), Nr. 11—13.

[26]) A. Plamitzer, l. c. [19]) (II. Mitteilung), Nr. 32.

Kegels Γ_0^ν *enthält die Erzeugenden* $a_{01}, a_{02}, a_{01}^*, a_{02}^*, \ldots$ der $\Gamma_{01}, \Gamma_{02}, \Gamma_{01}^*, \Gamma_{02}^*, \ldots$, *welche einen Büschel mit dem Scheitel* $A = \alpha_0 a_{12}$ *bilden.*

9. Weitere Eigenschaften der Raumkurve C**.** Im Bündel (W_0) nehmen wir jetzt einen zweiten unikursalen Kegel $\Gamma_0^{\nu'}$ von der Klasse ν' an, welcher jede r_i-fache Hauptebene φ_i^0 zur l_i'-fachen Tangentialebene besitzt. Ihm entspricht im Bündel (W_ι), $\iota = 1, 2$, eine unikursale Kegelfläche $\Gamma_\iota^{\varepsilon'}$ von der Klasse $\varepsilon' = \nu' n - \sum_i l_i' r_i$, für welche jede s_k-fache Hauptebene φ_k^ι eine $(\nu' s_k - \sum_i l_i' \mu_{ik}) = \lambda_k'$-fache Tangentialebene ist. Aus Nr. 8 folgt unmittelbar, daß (vgl. die Relation (15)) die projektiven Tangentialebenenbüschel $(\Gamma_0^{\nu'}) \barwedge (\Gamma_1^{\varepsilon'}) \barwedge (\Gamma_2^{\varepsilon'})$ eine *unikursale Raumkurve* C' von der Ordnung

$$\nu'(2n+1) - 2\sum_i l_i' r_i$$

erzeugen.

Um die Schnittpunkte der Raumkurven C und C' zu bestimmen, betrachten wir die gemeinsamen Tangentialebenen der Trägerkegel Γ_0^ν und $\Gamma_0^{\nu'}$. Jeder r_i-fachen Hauptebene φ_i^0, die l_i-fache Tangentialebene für Γ_0^ν und l_i'-fache Tangentialebene für $\Gamma_0^{\nu'}$ ist, entsprechen im Bündel (W_1) (vgl. die Relation (14)) l_i gemeinsame Tangentialebenen $\alpha_1, \ldots$ der Kegelflächen $\Gamma_1^\varepsilon, \Phi_i^1$ und analog l_i' gemeinsame Tangentialebenen $\alpha_1', \ldots$ der Kegelflächen $\Gamma_1^{\varepsilon'}, \Phi_i^1$. Da aber im allgemeinen die Ebenen $\alpha_1, \ldots$ und $\alpha_1', \ldots$ voneinander verschieden sind, so sind auch die l_i Punkte $A = \varphi_i^0 \alpha_1 \alpha_2, \ldots$ der Raumkurve C von den l' Punkten $A' = \varphi_i^0 \alpha_1' \alpha_2', \ldots$ der Raumkurve C' verschieden. Außer den Hauptebenen des Bündels (W_0) besitzen die Kegel Γ_0^ν und $\Gamma_0^{\nu'}$ noch

$$\omega = \nu\nu' - \sum_i l_i l_i'$$

weitere gemeinsame Tangentialebenen $\zeta_0, \ldots$ Homologe Ebenen $\zeta_1, \ldots$ des Bündels (W_1) sind gemeinsame Tangentialebenen der Kegel $\Gamma_1^\varepsilon, \Gamma_1^{\varepsilon'}$, und homologe Ebenen $\zeta_2, \ldots$ des Bündels (W_2) sind gemeinsame Tangentialebenen der Kegel $\Gamma_2^\varepsilon, \Gamma_2^{\varepsilon'}$. Jeder von den Punkten $Z = \zeta_0 \zeta_1 \zeta_2, \ldots$ ist ein gemeinsamer Punkt der Raumkurven C und C'.

Um die ω Schnittpunkte der C und C' zu bestimmen, können wir auch die gemeinsamen Tangentialebenen der Trägerkegel, z. B. Γ_1^ε und $\Gamma_1^{\varepsilon'}$, bestimmen. Jeder s_k-fachen Hauptebene φ_k^1 des Bündels (W_1), die λ_k-fache Tangentialebene für Γ_1^ε und λ_k'-fache Tangentialebene für $\Gamma_1^{\varepsilon'}$ ist, entsprechen (vgl. Nr. 8) im Bündel (W_0) die λ_k gemeinsamen Tangentialebenen $\beta_0, \ldots$ der Kegelflächen Γ_0^ν, Φ_k^0, und analog die λ_k' gemeinsamen Tangentialebenen $\beta_0', \ldots$ der Kegel $\Gamma_0^{\nu'}, \Phi_k^0$. Da aber im allgemeinen die Ebenen $\beta_0, \ldots$ und $\beta_0', \ldots$ voneinander verschieden sind, so sind auch die λ_k Punkte $B = \beta_0 \varphi_k^1 \varphi_k^2, \ldots$ der Raumkurve C von den Punkten $B' = \beta_0' \varphi_k^1 \varphi_k^2, \ldots$ der Raumkurve C' verschieden. Außer den Hauptebenen des Bündels (W_1) besitzen die Kegelflächen Γ_1^ε und $\Gamma_1^{\varepsilon'}$ noch

$$\varepsilon\varepsilon' - \sum_k \lambda_k \lambda_k' = \omega$$

weitere gemeinsame Tangentialebenen $\zeta_1, \ldots$, denn es gelten (s. die Relationen VIII, V, I, VI in Nr. 1) folgende Beziehungen:

$$(\sum_i l_i r_i)(\sum_i l_i' r_i) = \sum_i l_i l_i' r_i^2 + \sum_{i \neq h} l_i l_h' r_i r_h,$$

$$\sum_k [(\sum_i l_i \mu_{ik})(\sum_i l_i' \mu_{ik})] = \sum_k (\sum_i l_i l_i' \mu_{ik}^2 + \sum_{i \neq h} l_i l_i' \mu_{ik} \mu_{hk}) = \sum_i l_i l_i' \sum_k \mu_{ik}^2 + \sum_{i \neq h} l_i l_i' \mu_{ik} \mu_{hk}$$

$$= \sum_i l_i l_i' (r_i^2 + 1) + \sum_{i \neq h} l_i l_h r_i r_h = \sum_i l_i l_i' + (\sum_i l_i r_i)(\sum_i l_i' r_i),$$

$$(18)\quad \varepsilon\varepsilon' - \sum_k \lambda_k \lambda_k' = \varepsilon\varepsilon' - \sum_k (\nu s_k - \sum_i l_i \mu_{ik})(\nu' s_k - \sum_i l_i' \mu_{ik})$$
$$= \varepsilon\varepsilon' - \sum_k [\nu\nu' s_k^2 - \nu' s_k \sum_i l_i \mu_{ik} - \nu s_k \sum_i l_i' \mu_{ik} + (\sum_i l_i \mu_{ik})(\sum_i l_i' \mu_{ik})]$$
$$= \varepsilon\varepsilon' - \nu\nu' \sum_k s_k^2 + \nu' \sum_i l_i \sum_k s_k \mu_{ik} + \nu \sum_i l_i' \sum_k s_k \mu_{ik} - \sum_k [(\sum_i l_i \mu_{ik})(\sum_i l_i' \mu_{ik})]$$
$$= \varepsilon\varepsilon' - \nu\nu'(n^2-1) + \nu' \sum_i l_i n r_i + \nu \sum_i l_i' n r_i - \sum_i l_i l_i' - (\sum_i l_i r_i)(\sum_i l_i' r_i)$$
$$= \varepsilon\varepsilon' + \nu\nu' - \sum_i l_i l_i' - \nu' n(\nu n - \sum_i l_i r_i) + \sum_i l_i' r_i (\nu n - \sum_i l_i r_i)$$
$$= \varepsilon\varepsilon' + \nu\nu' - \sum_i l_i l_i' - (\nu n - \sum_i l_i r_i)(\nu' n - \sum_i l_i' r_i) = \nu\nu' - \sum_i l_i l_i' = \omega.$$

Daher treffen sich die Raumkurven C und C' in ω Punkten.

Nehmen wir jetzt — gegen die vorher gemachte Voraussetzung — an, daß von den l_i (resp. l_i') gemeinsamen Tangentialebenen $\alpha_1, \ldots$ (resp. $\alpha_1', \ldots$) der Kegel Γ_1^ε und Φ_i^1 (resp. $\Gamma_1^{\varepsilon'}$ und Φ_i^1) die l^* Ebenen $\alpha_1 = \alpha_1', \ldots$ identisch sind. Homologe Ebenen im Bündel (W_2) sind auch identisch, $\alpha_2 = \alpha_2', \ldots$, und die Raumkurven C, C' besitzen daher l^* auf φ_i^0 liegende gemeinsame Punkte $A = \varphi_i^0 \alpha_1 \alpha_2 = \varphi_i^0 \alpha_1' \alpha_2' = A', \ldots$ Da aber die Kegel Γ_1^ε und $\Gamma_1^{\varepsilon'}$ außer den Hauptebenen $\varphi_k^1, \ldots$ des Bündels (W_1) nur ω gemeinsame Tangentialebenen besitzen können, so sind es die l^* Ebenen $\alpha_1 = \alpha_1', \ldots$ und die $\omega - l^*$ Ebenen $\zeta_1, \ldots$ Auch in diesem Falle schneiden sich die Raumkurven C, C' nur in ω Punkten. — Dasselbe Resultat erhalten wir, wenn die Kegelflächen Γ_0^ν, $\Gamma_0^{\nu'}$ und Φ_k^0 — gegen die Voraussetzung — λ^* gemeinsame Tangentialebenen $\beta_0 = \beta_0', \ldots$ besitzen. Außer den Hauptebenen des Bündels (W_0) besitzen die Kegel Γ_0^ν, $\Gamma_0^{\nu'}$ wirklich nur ω gemeinsame Tangentialebenen, nämlich λ^* Ebenen $\beta_0 = \beta_0', \ldots$ und $\omega - \lambda^*$ Ebenen $\zeta_0, \ldots$ Daher gilt:

Je zwei auf der Fläche Ψ *liegende unikursale Raumkurven* C *und* C' *von den Ordnungen* $\nu(2n+1) - 2\sum_i l_i r_i$ *und* $\nu'(2n+1) - 2\sum_i l_i' r_i$ *schneiden sich in* $\nu\nu' - \sum_i l_i l_i'$ *Punkten.*

Durch die Raumkurve C geht (Nr. 8) die unikursale Regelfläche Γ_{12} vom Grade $2\varepsilon = 2(\nu n - \sum_i l_i r_i)$ hindurch. Durch die Raumkurve C' geht ganz analog eine unikursale Regelfläche Γ_{12}' vom Grade $2\varepsilon' = 2(\nu' n - \sum_i l_i' r_i)$ hindurch, welche (vgl. Nr. 8) das Erzeugnis projektiver Tangentialebenenbüschel $(\Gamma_1^{\varepsilon'}) \overline{\wedge} (\Gamma_2^{\varepsilon'})$ ist. Die kubische Raumkurve S_{12}^3 ist eine ε-fache Kurve für Γ_{12} und eine ε'-fache Kurve für Γ_{12}'. Jede Gerade $f_{12}^k = \varphi_k^1 \varphi_k^2$ ist eine λ_k-fache Erzeugende von Γ_{12}, und eine λ_k'-fache Erzeugende von Γ_{12}'. Diese Regelflächen, welche noch ω gemeinsame Erzeugende $z_{12} = \zeta_1 \zeta_2, \ldots$ besitzen, schneiden sich daher (vgl. die Relation (18)) in einer Raumkurve C^* von der Ordnung

$$3\varepsilon\varepsilon' + \sum_k \lambda_k \lambda_k' + \omega = 3\varepsilon\varepsilon' + \varepsilon\varepsilon' = 4\varepsilon\varepsilon'.$$

Die auf Γ_{12} liegende Raumkurve C von der Ordnung $\nu(2n+1) - 2\sum l_i r_i = 2\varepsilon + \nu$ schneidet die Regelfläche $2\varepsilon'$. Grades Γ_{12}' in $2\varepsilon'(2\varepsilon + \nu)$ Punkten, welche der Raumkurve C^* angehören. Jede von den ω gemeinsamen Erzeugenden $z_{12} = \zeta_1 \zeta_2, \ldots$ der Flächen Γ_{12} und Γ_{12}' trifft die Raumkurve C in einem Punkte $Z = z_{12} \zeta_0 = \zeta_0 \zeta_1 \zeta_2, \ldots$ Da jede Gerade f_{12}^k (Nr. 8) eine λ_k-fache Sekante von C und eine λ_k'-fache Erzeugende von Γ_{12}' ist, so zählen die Schnittpunkte der Gebilde f_{12}^k und C für $\lambda_k \lambda_k'$ gemeinsame Punkte. Die übrigen

$$2\varepsilon'(2\varepsilon + \nu) - \omega - \sum_k \lambda_k \lambda_k' = 2\varepsilon'(2\varepsilon + \nu) - \varepsilon\varepsilon' = \varepsilon'(3\varepsilon + 2\nu)$$

Punkte liegen daher auf der kubischen Raumkurve S_{12}^3. Da aber S_{12}^3 eine ε'-fache Kurve

der Regelfläche Γ'_{12} ist, und jeder auf S^3_{12} liegende Schnittpunkt von C und Γ'_{12} für ε' gemeinsame Punkte zählt, so schneiden sich die Kurven C und S^3_{12} in

$$3\varepsilon + 2\nu = 3\nu n + 2\nu - 3\sum_i l_i r_i$$

Punkten. Daher folgt:

Die auf der Fläche Ψ liegende unikursale Raumkurve C von der Ordnung $\nu(2n+1) - 2\Sigma l_i r_i$ schneidet die n-fache kubische Raumkurve S^3_{12} der Fläche Ψ in $3\nu n + 2\nu - 3\Sigma l_i r_i$ Punkten.

10. Das Zerfallen der Raumkurve C. Betrachten wir jetzt im Bündel (W_0) eine unikursale Kegelfläche ν. Klasse Γ^ν_0, welche jede r_i-fache Hauptebene φ^0_i zur l_i-fachen und jede von den $2(n+2)$ Ebenen τ'_0 (Nr. 2) zur q_i-fachen Tangentialebene besitzt. Es gilt folgende Beziehung:

$$\sum_i \tfrac{1}{2} l_i(l_i - 1) + \sum_i \tfrac{1}{2} q_i(q_i - 1) \leqq \tfrac{1}{2}(\nu - 1)(\nu - 2).$$

Jeder Ebene τ'_0 entspricht im Bündel (W_1) eine q_i-fache Tangentialebene τ'_1 des homologen Kegels ε. Klasse Γ^ε_1 und im Bündel (W_2) eine ebensolche Ebene τ'_2 des Kegels ε. Klasse Γ^ε_2, wo $\varepsilon = \nu n - \sum_i l_i r_i$ ist. Aus Nr. 8 folgt unmittelbar:

Die unikursale Raumkurve C von der Ordnung $\nu(2n+1) - 2\Sigma l_i r_i$, welche auf der Fläche Ψ liegt, zerfällt in die $2(n+2)$ auf Ψ liegenden q_i-fachen Geraden $t'_{012} = \tau'_0\tau'_1\tau'_2$ und in eine Raumkurve C_1 von der Ordnung $\nu(2n+1) - 2\sum_i l_i r_i - \sum_i q_i$.

Homologe Ebenen (vgl. die Relation (15) in Nr. 8) der projektiven Büschel $(\Gamma^\nu_0) \bar{\wedge} (\Gamma^\varepsilon_1) \bar{\wedge} (\Gamma^\varepsilon_2)$ schneiden sich in Punkten $A = \alpha_0\alpha_1\alpha_2$, $B = \beta_0\beta_1\beta_2, \ldots$ der Raumkurve C_1. Wenn die Tangentialebene α_0 den Trägerkegel Γ^ν_0 durchläuft, so durchläuft gleichzeitig die homologe Tangentialebene α_1 (resp. α_2) den Trägerkegel Γ^ε_1 (resp. Γ^ε_2) und der Punkt $A = \alpha_0\alpha_1\alpha_2$ durchläuft die Raumkurve C_1. Und da bei dieser Bewegung der Ebene α_0 auf Γ^ν_0 die Tangentialebene τ'_0 genau q_i-mal überschritten wird, so muß es, im Kontinuum, auf der Raumkurve C_1 auch q_i Punkte geben, die auf der Geraden $t'_{012} = \tau'_0\tau'_1\tau'_2$ liegen. Es folgt:

Jede von den $2(n+2)$ einfachen Geraden t'_{012} der Fläche Ψ ist eine q_i-fache Sekante der Raumkurve C_1 von der Ordnung $\nu(2n+1) - 2\sum_i l_i r_i - \sum_i q_i$.

Aus Nr. 8, 7 und 9 folgt unmittelbar:

Jede s_k-fache Gerade f^k_{12} der Fläche Ψ ist eine $(\nu s_k - \sum_i l_i \mu_{ik})$-fache Sekante der Raumkurve C_1.

Die — auf der r_i-fachen Hauptebene φ^0_i des Bündels (W_0) liegenden — *Plankurven $2r_i$. Ordnung F^i und $(2n - 2r_i + 1)$. Ordnung K^i der Fläche Ψ treffen l_i-mal resp. $[\nu(2n+1) - l_i - 2\sum_i l_i r_i - \sum_i q_i]$-mal die auf Ψ liegende Raumkurve C_1.*

Da jede q_i-fache Gerade $t'_{012} = \tau'_0\tau'_1\tau'_2$ eine Bisekante der Raumkurve S^3_{12} ist, so ergibt sich aus Nr. 9:

Die — auf der Fläche Ψ liegende — Raumkurve C_1 von der Ordnung $\nu(2n+1) - 2\sum_i l_i r_i - \sum_i q_i$ schneidet die n-fache kubische Raumkurve S^3_{12} der Fläche Ψ in $3\nu n + 2\nu - 3\sum_i l_i r_i - 2\sum_i q_i$ Punkten.

Betrachten wir jetzt im Bündel (W_0) noch einen zweiten unikursalen Kegel ν'. Klasse $\Gamma^{\nu'}_0$, welcher jede r_i-fache Hauptebene φ^0_i zur l'_i-fachen und jede Ebene τ'_0 zur q'_i-fachen Tangentialebene besitzt. Das Erzeugnis projektiver Büschel $(\Gamma^{\nu'}_0) \bar{\wedge} (\Gamma^{\varepsilon'}_1) \bar{\wedge} (\Gamma^{\varepsilon'}_2)$ ist (s. Nr. 8 und 10) eine unikursale Raumkurve von der Ordnung $\nu'(2n+1) - 2\sum_i l'_i r_i$,

welche in die $2(n+2)$ auf Ψ liegenden q_i-fachen Geraden t'_{012} und in eine Raumkurve C'_1 von der Ordnung $\nu'(2n+1) - 2\sum_i l'_i r_i - \sum_i q'_i$ zerfällt. Jede Gerade t'_{012} ist eine q'_i-fache Sekante, und jede Gerade f^k_{12} ist eine $(\nu' s_k - \sum_i l'_i r_i)$-fache Sekante der Raumkurve C'_1.

Im allgemeinen Falle sind die q_i Schnittpunkte der Geraden t'_{012} mit der Raumkurve C_1 von den q'_i Schnittpunkten der t'_{012} mit C'_1 verschieden. Ganz analog wie in Nr. 9 können wir folgenden Satz beweisen:

Je zwei auf der Fläche Ψ *liegende Raumkurven* C_1 *und* C'_1 *von den Ordnungen*

$$\nu(2n+1) - 2\sum_i l_i r_i - \sum_i q_i \quad \text{und} \quad \nu'(2n+1) - 2\sum_i l'_i r_i - \sum_i q'_i$$

schneiden sich in $\nu\nu' - \sum_i l_i l'_i - \sum_i q_i q'_i$ *Punkten.*

11. Einige Spezialfälle. In dem besonderen Fall $\nu = 1, l = 0$ erhalten wir auf der Fläche Ψ (s. Nr. 8) eine unikursale Raumkurve $(2n+1)$. Ordnung, $3(2n-1)$. Klasse und $4n$. Ranges C, als Erzeugnis (vgl. die Relation (15)) projektiver Ebenenbüschel

$$(15\,a) \qquad c_0(\alpha_0, \beta_0, \ldots) \barwedge \Gamma^n_1(\alpha_1, \beta_1, \ldots) \barwedge \Gamma^n_2(\alpha_2, \beta_2, \ldots),$$

deren Träger eine Gerade c_0 und zwei unikursale Kegel n. Klasse Γ^n_1, Γ^n_2 sind. Diese Raumkurve C besitzt $\delta_0 = n(2n-1)$ scheinbare Doppelpunkte und [27]) eine $2n$-fache Sekante c_0.

Ist die Achse $c_0 = \varphi^0_i \tau^i_0$ Schnittgerade der r_i-fachen Hauptebene φ^0_i mit der Ebene τ^i_0, so erhalten wir eine Raumkurve C, welche (s. Nr. 10) in die einfache Gerade t'_{012} der Fläche Ψ und in eine Raumkurve $2(n-r_i)$. Ordnung C_1 zerfällt.

Betrachten wir im Bündel (W_0) eine Kegelfläche 2. Grades Γ^2_0, welche drei r_i-fache Hauptebenen φ^0_i, $i = 1, 2, 3$, und zwei Ebenen τ^1_0, τ^2_0 zu Tangentialebenen besitzt, so zerfällt die Raumkurve C in zwei einfache Geraden t^1_{012}, t^2_{012} der Fläche Ψ und in eine Raumkurve $2\left(2n - \sum_{i=1}^{3} r_i\right)$. Ordnung C_2.

Es folgt unmittelbar (vgl. Nr. 1 und 7), daß die betrachtete Fläche $(2n+1)$. Ordnung Ψ: a) ϱ unikursale Plankurven $2r_i$. Ordnung F^i, b) $\varrho(2n+4)$ Raumkurven $2(n-r_i)$. Ordnung C_1, c) $\binom{\varrho}{3}\binom{2n+4}{2}$ Raumkurven $2\left(2n - \sum_{i=1}^{3} r_i\right)$ Ordnung C_2 besitzt.

Im Falle der Jonquièresschen Verwandtschaften n. Grades (s. Nr. 1) für $r_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots, 2n+2$ und $r_h = n-1$, $h = 1$ besitzt (vgl. Nr. 7) die Fläche $(2n+1)$. Ordnung Ψ: a) $2(n-1)$ *Kegelschnitte* F^i und eine unikursale Plankurve $2(n-1)$. Ordnung F^i, b) $(2n-2)(2n+4) = 4(n-1)(n+2)$ Raumkurven $2(n-1)$. Ordnung C_1 und $2(n+2)$ *Kegelschnitte* C_1, c) $\binom{2n-2}{2}\binom{2n+4}{2} = (n-1)(n+2)(4n^2-9)$ Raumkurven $2(n-1)$. Ordnung C_2 und $\binom{2n-2}{3}\binom{2n+4}{2} = \frac{2}{3}(n-1)(4n^2-9)(n^2-4)$ Raumkurven $2(2n-3)$. Ordnung C_2.

Insbesondere ergeben sich für $n = 2$ die 55 Kegelschnitte der Fläche 5. Ordnung Ψ^5, nämlich a) drei Kegelschnitte F^i, b) 24 Kegelschnitte C_1 und c) 28 Kegelschnitte C_2.

12. Abbildungen der Fläche Ψ. Die drei Ebenenbündel, welche der Relation (4) in Nr. 2 genügen,

$$(4) \qquad (W_1)\,\varkappa\,(W_2), \quad (W_0)\,\pi^n(W_1), \quad (W_0)\,\pi^n(W_2),$$

erzeugen die Fläche Ψ. Beziehen wir jetzt a) das Bündel (W_0) oder b) die kollinearen Bündel $(W_1)\,\varkappa\,(W_2)$ auf ein ebenes Feld (ω') *korrelativ*, so erhalten wir zwei eineindeutige Abbildungen unserer Fläche Ψ auf die Ebene ω'.

---

[27]) A. Plamitzer, l. c. [19]) (II. Mitteilung), Nr. 41.

Im ersten Falle ergeben sich aus (4) und der Korrelation

$$(19) \qquad W_0(\alpha_0, \beta_0, \ldots, c_0, d_0, \ldots) \; \varkappa_1 \quad \omega'(A', B', \ldots, c', d', \ldots)$$

unmittelbar folgende allgemeinen Cremonaschen Verwandtschaften n. Grades

$$(20) \qquad (W_1)\, \pi^n(\omega'), \quad (W_2)\, \pi^n(\omega')$$

zwischen dem Ebenenbündel (W_1) resp. (W_2) und dem Punktfelde (ω'). Jedem beliebigen Punkte $A = \alpha_0\alpha_1\alpha_2$ der Fläche Ψ ist ein einziger Punkt A' des Feldes (ω') zugeordnet, und dem Bildpunkte A' korrespondiert auf Ψ der Punkt A. Jedem Punkte der n-fachen kubischen Raumkurve S^3_{12} der Fläche Ψ sind (vgl. Nr. 3) n Bildpunkte zugeordnet. Die einfachen Geraden $t'_{012} = \tau'_0\tau'_1\tau'_2$ der Fläche Ψ bilden sich als Punkte T'_i ab. Die Bildkurve einer s_k-fachen Geraden $f^k_{12} = \varphi^1_k\varphi^2_k$ ist (Nr. 3) eine Plankurve s_k. Ordnung F'_k. Die unikursale Plankurve $2r_i$. Ordnung F^i der Fläche Ψ, welche (Nr. 7) auf der r_i-fachen Hauptebene φ^0_i des Bündels (W_0) liegt, bildet sich im Punkte F'_i ab, usw.

Im zweiten Falle ergibt sich aus (4) und den Korrelationen

$$(21) \quad W_h(\alpha_h, \beta_h, \ldots, c_h, d_h, \ldots) \; \varkappa_2 \quad \omega'(A', B', \ldots, c', d', \ldots), \; h = 1, 2,$$

unmittelbar eine allgemeine Cremonasche Verwandtschaft n. Grades

$$(22) \qquad (W_0)\, \pi^n(\omega')$$

zwischen dem Ebenenbündel (W_0) und dem Punktfelde (ω'). Auch in diesem Falle entspricht jedem beliebigen Punkte $A = \alpha_0\alpha_1\alpha_2$ der Fläche Ψ ein Punkt A' des Feldes (ω'). Jedem Punkte der Raumkurve S^3_{12} entsprechen n Bildpunkte. Jede s_k-fache Gerade $f^k_{12} = \varphi^1_k\varphi^2_k$ (resp. einfache Gerade $t'_{012} = \tau'_0\tau'_1\tau'_2$) bildet sich als Punkt F'_k (resp. T'_i) ab. Die Bildkurve einer unikursalen Plankurve $2r_i$. Ordnung F^i, welche auf Ψ und φ^0_i liegt, ist eine Kurve r_i. Ordnung F'_i usw.

Aus der Relation (21) folgt eine Korrespondenz [1,1] zwischen den Punkten $A', B', \ldots$ des Feldes (ω') und den Geraden $a_{12} = \alpha_1\alpha_2, b_{12} = \beta_1\beta_2, \ldots$ der Kongruenz (Nr. 2) 1. Ordnung und 3. Klasse K_{12}. Da aber die Geraden $a_{12}, b_{12}, \ldots$, als Bisekanten der n-fachen kubischen Raumkurve S^3_{12} der Fläche Ψ, diese Fläche (Nr. 4) noch bzw. in Punkten $A = \alpha_0 a_{12}$, $B = \beta_0 b_{12}, \ldots$ schneiden, so ergibt sich die zweite Abbildung der Fläche Ψ als eine Korrespondenz [1,1] zwischen den Punkten $A, B, \ldots$ und $A', B', \ldots$

Schneiden wir jetzt die Strahlenkongruenz K_{12} mit einer beliebigen Ebene ω', so erhalten wir einen besonderen Fall der letzteren Abbildung. Jeder beliebige Punkt A der Fläche Ψ und sein Bild A' liegen nämlich auf einer Bisekanten $a_{12} = AA'$ der kubischen Raumkurve S^3_{12}.

Eingegangen 27. Mai 1934.

Über einen Satz von Ö. Ore.

Von *Erik L. Petterson* in Stockholm.

In den „Skrifter utgit av videnskapsselskapet i Kristiania 1923" hat Ö. Ore unter anderm Polynome der Form $\varphi(x)^{pt} - \varphi(x) + a$ untersucht und folgenden Satz aufgestellt:

Wenn $f(x) \equiv \varphi(x)^{pt} - \varphi(x) + a \pmod p$ mit nicht durch p teilbaren a ist, so kann $f(x)$ nur dann eine Primfunktion von durch t teilbarem Grade m enthalten, wenn m sogar durch pt teilbar ist, wenn also $m = spt$ mit ganzem s ist.

Ich werde im folgenden diesen Satz präzisieren und verallgemeinern.

Es sei $f(x)$ ein normiertes ganzzahliges Polynom von der Form

$$f(x) = g(x)^{pt} - g(x) + a,$$

wo $g(x)$ ein ganzzahliges Polynom, t und a ganze Zahlen, $t > 0$ und p eine Primzahl mit $p \nmid a$ ist. Für eine Wurzel ξ eines modulo p irreduziblen Faktors von $f(x)$ gilt

$$g(\xi)^{pt} - g(\xi) + a \equiv 0 \pmod p.$$

Daraus folgt durch sukzessives Potenzieren mit p und Addition

$$g(\xi)^{p^{nt}} - g(\xi) + na \equiv 0 \pmod p$$

für jedes ganze $n > 0$. Ist nun $\xi \bmod p$ vom Grade r, so gilt

$$g(\xi)^{p^r} \equiv g(\xi) \pmod p.$$

Wegen $a \not\equiv 0 \pmod p$ hat man also

$$n \equiv 0 \pmod p$$

für jedes ganze $n > 0$ mit

$$nt \equiv 0 \pmod r.$$

Geht daher p^e in t auf, so muß mindestens p^{e+1} in r aufgehen. Damit ist folgender Satz bewiesen:

Satz 1. *Es sei $f(x)$ ein normiertes ganzzahliges Polynom von der Form $f(x) = g(x)^{pt} - g(x) + a$, wo $g(x)$ ein ganzzahliges Polynom, t und a ganze Zahlen, $t > 0$ und p eine Primzahl ist. Wenn dann $p^e | t$ $(e \geqq 0)$ und $p \nmid a$ ist, so kann $f(x)$ nur solche modulo p irreduziblen Faktoren enthalten, deren Gradzahlen Vielfache von p^{e+1} sind, d. h. die Gradzahl r eines Faktors muß von der Form $r = ip^{e+1}$ mit ganzem $i \geqq 1$ sein.*

Anm. Wenn $p^e | t$, $p^{e+1} \nmid t$ und außerdem $t | r$ ist, so folgt aus der bewiesenen Relation $p^{e+1} | r$ im obigen Satz die Beziehung $pt | r$, d. h. der Satz von Ore.

Der Satz 1 ist auch für ein Polynom der Form $f(x) = a + \sum_{\lambda=1}^{N} A_\lambda (g(x)^{\lambda p^t} - g(x)^\lambda)$ mit ganzen A_λ anwendbar. Man hat nämlich

$$a + \sum_{\lambda=1}^{N} A_\lambda (g(x)^{\lambda p^t} - g(x)^\lambda) \equiv a + \left(\sum_{\lambda=1}^{N} A_\lambda g(x)^\lambda \right)^{p^t} - \sum_{\lambda=1}^{N} A_\lambda g(x)^\lambda \pmod p.$$

In einem Aufsatz „Eine Bedingung für die irreduziblen Faktoren gewisser Polynome“ [1]) habe ich ein Polynom $S(x; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ folgendermaßen definiert:

$$S(x) = x; \quad S(x; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) = S(x^{\alpha_k}; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}) - S(x; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}), \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Nach der dort abgeleiteten Darstellung

$$S(x; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \sum_m \pm ((x^m)^{\alpha_k} - x^m), \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

bleibt also der Satz 1 auch für das Polynom

$$f(x) = S\left(g(x); p_1^{\nu_1 p_1^{e_1}}, p_2^{\nu_2 p_2^{e_2}}, \ldots, p_n^{\nu_n p_n^{e_n}}\right) + a$$

für jedes p_ν anwendbar, und man erhält folgenden Satz:

Satz 2. *Wenn $g(x)$ ein normiertes ganzzahliges Polynom ist, so kann das Polynom $f(x) = S\left(g(x); p_1^{\nu_1 p_1^{e_1}}, p_2^{\nu_2 p_2^{e_2}}, \ldots, p_n^{\nu_n p_n^{e_n}}\right) + a$ mit verschiedenen Primzahlen p_ν und $\prod_{\nu=1}^{n} p_\nu \nmid a$ nur solche modulo $\prod_{\nu=1}^{n} p_\nu$ irreduziblen Faktoren enthalten, deren Gradzahlen Vielfache von $\prod_{\nu=1}^{n} p_\nu^{e_\nu+1}$ sind.*

[1]) Erscheint demnächst im Jahresber. d. D. M.-V.

Eingegangen 21. Juli 1934.

Über eine neue Methode zur Ermittlung der Planetenstörungen.

Von *Martin Brendel* in Freiburg i. Br.

Bekanntlich besteht die Hauptaufgabe im planetarischen Dreikörperproblem (Sonne und zwei sich gegenseitig störende Planeten) in der Entwicklung der sogenannten Störungsfunktion, und dabei kommt es im besonderen auf die Entwicklung der negativen Potenzen der gegenseitigen Entfernung Δ beider Planeten an. Sind r und r' die Radienvektoren beider Planeten und H der Winkel zwischen diesen beiden, so ist $\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos H$, und wenn man von den Exzentrizitäten der Bahnen absieht oder, wie oft üblich, nach deren Potenzen entwickelt und mit a und a' die mittleren Entfernungen von der Sonne bezeichnet, so handelt es sich vor allem um die Entwicklung der Größe $\frac{a'}{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2-2\alpha\cos H}}$ nach Vielfachen von H, wobei $\alpha = \frac{a}{a'}$ gesetzt ist.

Die Entwicklung dieser Größe und ihrer ungeraden Potenzen hat zu einer umfangreichen Literatur geführt, die mit den Namen Laplace, Lagrange, Legendre, Cauchy, Gauss, Newcomb, Hansen, Gyldén und vieler anderer verknüpft ist. Besonders für die Berechnung der Koeffizienten in der Entwicklung von $(1+\alpha^2-2\alpha\cos H)^{-\frac{n}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} b_n^{(i)} \cos iH$, wie sie von Laplace bezeichnet sind, besitzen wir eine große Anzahl von Methoden. Die vorstehende Reihe ist zwar für alle Werte $\alpha < 1$ konvergent; jedoch läßt die numerische Konvergenz zu wünschen übrig, und für nicht kleine Werte von α erfordert sie die Berücksichtigung sehr vieler Glieder. Auch werden die Koeffizienten $b_n^{(i)}$ selbst wieder durch unendliche Reihen ausgedrückt.

Ich habe daher eine Methode angegeben, bei der die negativen Potenzen von Δ durch geschlossene *genaue* Ausdrücke streng dargestellt werden und somit die Entwicklung nach Vielfachen von H, die die Mathematiker und Astronomen zu ebenso schwierigen wie wichtigen Untersuchungen veranlaßt hat, gänzlich fortfällt. Es wird dies erreicht durch die Einführung einer Veränderlichen φ an Stelle von H, die mit H durch die Beziehung der Landenschen Transformation

$$\frac{\Delta}{a'} \sin \varphi = \sin H \tag{1}$$

verbunden ist.

Setzt man

$$\vartheta = \frac{\Delta}{\alpha'} = \sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos H}, \qquad \Delta\varphi = \sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi}, \tag{2}$$

so hat man die Beziehungen

$$(3)\qquad \begin{aligned} \vartheta \sin\varphi &= \sin H, & \vartheta &= \Delta\varphi - \alpha\cos\varphi, \\ \vartheta\cos\varphi &= \cos H - \alpha, & \vartheta^{-1} &= \frac{\Delta\varphi + \alpha\cos\varphi}{1-\alpha^2}, \end{aligned} \qquad \vartheta^2 = 1 + \alpha^2\cos 2\varphi - 2\alpha\cos\varphi\,\Delta\varphi$$

und allgemein an Stelle der umständlichen unendlichen Reihen nach Vielfachen von H endliche genaue Reihen der Form

$$\vartheta^{-2n} = \sum_{i=0}^{n} \alpha_n^{(i)} \cos 2i\varphi + \Delta\varphi \sum_{i=1}^{n} \beta_n^{(i)} \cos(2i-1)\varphi,$$

$$\vartheta^{-(2n+1)} = \sum_{i=0}^{n} \alpha_n^{(i)} \cos(2i+1)\varphi + \Delta\varphi \sum_{i=0}^{n} \beta_n^{(i)} \cos 2i\varphi.$$

Die Veränderliche φ ist übrigens gleich dem Winkel am gestörten Planeten in dem von den drei Körpern gebildeten Dreieck, wenn man von den Exzentrizitäten und Neigungen absieht.

Zur Ausführung der Integrationen wird man allerdings im allgemeinen die Größe $\Delta\varphi$ in eine Reihe nach Vielfachen von φ entwickeln müssen, die aber derart stark konvergiert, daß man auch in schwierigen Fällen nur wenige Glieder zu berücksichtigen braucht.

Die Methode habe ich bereits auf die gegenseitigen Störungen von Jupiter und Saturn angewandt [1]) und die meisten Störungen von der ersten Ordnung der Masse berechnet. Es zeigt sich dabei, daß durch eine verhältnismäßig kurze Rechnung leicht die hundertfache Schärfe erreicht und verbürgt werden kann, im Vergleich mit allen anderen bisher üblichen Methoden. Es ist damit eine strenge Berechnung der Störungen weit innerhalb der Beobachtungsfehler möglich, was bei den übrigen Methoden, schon wegen der komplizierten Rechnungen, nicht durchführbar ist.

An einem oft herangezogenen Beispiel, nämlich den Störungen eines kleinen Planeten durch Jupiter unter Berücksichtigung nur der von den Exzentrizitäten und Neigungen unabhängigen Glieder mögen die Umrisse der Methode klargelegt werden. Will man auch die von den genannten Größen sowie die von den höheren Potenzen der Masse abhängigen Glieder berücksichtigen, so ergeben sich ähnliche Ausdrücke. Doch ist dann die rein numerische Rechnung der analytischen Entwicklung vorzuziehen, da sie ohne längere Entwicklungen zum Ziele führt.

Wir stellen die Koordinaten des gestörten Planeten, wobei r den Radiusvektor und v die Länge in der Bahn bedeutet, in folgender Form dar, indem wir den ersteren und die Flächengeschwindigkeit durch die Gleichungen

$$(4)\qquad r = \frac{p}{1+\varrho}, \qquad p = a(1-\psi)$$

$$(5)\qquad r^2\frac{dv}{dt} = \sqrt{Mp}$$

ausdrücken. Dabei ist a eine der mittleren Entfernung entsprechende Konstante, $r^2\frac{dv}{dt}$ die Flächengeschwindigkeit, p der oskulierende Parameter der Bahn und M die Sonnenmasse. Wenn man die auf den störenden Körper bezüglichen Größen durch einen Akzent kennzeichnet, so gelten für ψ und ϱ die Differentialgleichungen [2])

---

[1]) M. Brendel, Bemerkungen zur Theorie der großen Planeten, Astron. Nachr. **238** (1930), S. 197, und **250** (1933), S. 177.

[2]) Vgl. M. Brendel, Neue Methoden zur Ermittlung der Planetenstörungen, Arbeiten des Planeteninstituts Frankfurt, Heft 7 (1929) = Mitteilungen der Universitätssternwarte Frankfurt, 6. Stück).

$$(6)\quad \frac{d\psi}{dv} = \frac{2(1-\psi)}{1+\varrho}\, m' Q, \qquad \frac{d^2\varrho}{dv^2} + \varrho = m'\left(P - 2\frac{dQ}{dv} - \frac{Q}{1+\varrho}\frac{d\varrho}{dv} - \frac{2}{1+\varrho}\, m' Q^2\right),$$

wo m' die Masse des störenden Planeten, sowie

$$(7)\qquad Q = -\left(\frac{r'^3}{\Delta^3} - 1\right)\frac{r^2}{r'^2}\frac{\partial \cos H}{\partial v}, \qquad P = \frac{r^3}{\Delta^3} - \left(\frac{r'^3}{\Delta^3} - 1\right)\frac{r^2}{r'^2}\cos H$$

ist und wo zunächst v als unabhängige Veränderliche gebraucht ist. Die Beziehung zwischen der Zeit t und der Länge v folgt aus der Gleichung

$$(8)\qquad n\frac{dt}{dv} = \frac{(1-\psi)^{\frac{3}{2}}}{(1+\varrho)^2}, \qquad n = \frac{\sqrt{M}}{a^{\frac{3}{2}}}.$$

Die vorstehenden Beziehungen sind streng. Da wir hier nur die Grundzüge der Methode schildern wollen, so behandeln wir nur die Gruppe von periodischen Lösungen, bei der die Exzentrizitäts- und Neigungskonstanten verschwinden, betrachten also nur die von diesen unabhängigen Glieder. Außerdem beschränken wir uns auf die Störungen, die von der ersten Potenz der störenden Masse abhängen. Die vollständige Lösung des Planetenproblems beruht durchaus auf denselben Grundzügen. Es wird dann

$$(9)\quad \frac{d\psi}{dv} = 2m' Q, \qquad (10)\quad \frac{d^2\varrho}{dv^2} + \varrho = m'\left(P - 2\frac{dQ}{dv}\right), \qquad (11)\quad n\frac{dt}{dv} = 1 - 2\varrho - \frac{3}{2}\psi,$$

$$(12)\quad H = v - v' = (1-\mu)(v - B), \qquad \Delta^2 = a^2 + a'^2 - 2aa'\cos H,$$

wo $\mu = \frac{n'}{n}$ das Verhältnis der „mittleren Bewegungen" beider Planeten und B eine von der Anfangslage abhängige Konstante ist. Weiter wird

$$(13)\quad Q = (\vartheta^{-3} - 1)\,\alpha^2 \sin H, \qquad P = \alpha^3\vartheta^{-3} - (\vartheta^{-3} - 1)\,\alpha^2\cos H.$$

Da ferner

$$(14)\qquad \frac{dv}{dH} = \frac{1}{1-\mu}, \qquad \frac{dH}{d\varphi} = \frac{\vartheta}{\Delta\varphi}, \qquad \frac{dv}{d\varphi} = \frac{\vartheta}{(1-\mu)\Delta\varphi}$$

ist, so wird

$$(15)\qquad \frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{2m'\alpha^2}{(1-\mu)\Delta\varphi}(\vartheta^{-1} - \vartheta^2)\sin\varphi.$$

Dieser Ausdruck kann unmittelbar integriert werden. Es wird

$$(16)\qquad \psi = -\frac{2m'\alpha}{1-\mu}(\vartheta^{-1} + \vartheta\Delta\varphi) + c_1$$

oder, wenn man durchweg φ einführt,

$$(17)\quad \psi = -\frac{2m'\alpha^2}{1-\mu}\left[\frac{1}{\alpha(1-\alpha^2)}\Delta\varphi + \frac{1}{1-\alpha^2}\cos\varphi - \Delta\varphi\cdot\cos\varphi - \alpha\sin^2\varphi\right] + c_2,$$

wo die beiden Konstanten c_1 und c_2 in der Beziehung $c_2 = c_1 - \frac{2m'\alpha}{1-\mu}$ zu einander stehen. Für die Flächengeschwindigkeit erhält man also einen genauen Ausdruck, bei dem jede Reihenentwicklung vermieden ist.

Zur Ermittlung von ϱ können wir die Gleichung (10) schreiben

$$(18)\qquad \varrho = g\cos v + h\sin v,$$

$$(19)\quad \frac{dg}{dv} = -m'(P\sin v + 2Q\cos v), \qquad \frac{dh}{dv} = m'(P\cos v - 2Q\sin v).$$

Es ist hier zweckmäßig, die Funktionen P und Q zu teilen, indem man mit Rücksicht auf (13) und (3) setzt

$$(20)\qquad \begin{aligned} P &= P_1 + P_2, \quad P_1 = \alpha^2 \cos H, \qquad P_2 = -\alpha^2 \vartheta^{-2} \cos \varphi, \\ Q &= Q_1 + Q_2, \quad Q_1 = -\alpha^2 \sin H, \qquad Q_2 = \alpha^2 \vartheta^{-2} \sin \varphi. \end{aligned}$$

In gleicher Weise werden dann die Funktionen g, h und ϱ geteilt, und zwar hat man

$$(21)\qquad \begin{aligned} \frac{dg_1}{dv} &= \frac{1}{2} m' \alpha^2 [3 \sin (H - v) + \sin (H + v)], \\ \frac{dh_1}{dv} &= \frac{1}{2} m' \alpha^2 [3 \cos (H - v) - \cos (H + v)] \end{aligned}$$

und, wenn man H nach (12) durch v ersetzt (oder umgekehrt) und integriert:

$$g_1 = \frac{1}{2} m' \alpha^2 \left[\frac{3}{\mu} \cos (H - v) - \frac{1}{2 - \mu} \cos (H + v)\right],$$

$$h_1 = -\frac{1}{2} m' \alpha^2 \left[\frac{3}{\mu} \sin (H - v) + \frac{1}{2 - \mu} \sin (H + v)\right]$$

und

$$(22)\qquad \varrho_1 = \frac{m' \alpha^2 (3 - 2\mu)}{\mu (2 - \mu)} \cos H.$$

Man kann also hier von der Einführung der Veränderlichen φ absehen.

Ähnlich haben wir nach (19) und (20), wenn wir nach (14) φ als unabhängige Veränderliche einführen:

$$(23)\qquad \begin{aligned} \frac{dg_2}{d\varphi} &= \frac{1}{2} \frac{m' \alpha^2}{1 - \mu} \frac{\vartheta^{-1}}{\Delta\varphi} [3 \sin (v - \varphi) - \sin (v + \varphi)], \\ \frac{dh_2}{d\varphi} &= -\frac{1}{2} \frac{m' \alpha^2}{1 - \mu} \frac{\vartheta^{-1}}{\Delta\varphi} [3 \cos (v - \varphi) - \cos (v + \varphi)]. \end{aligned}$$

Die Ermittlung von g_2 und h_2 gestaltet sich weniger einfach; sie muß verschieden geschehen je nach dem „Typus", dem der gestörte Planet angehört, d. h. nach dem Betrage seiner mittleren Bewegung, namentlich wenn das Verhältnis der mittleren Bewegungen nahe einem niedrigzahligen Bruche ist. Es liegt das bekanntlich daran, daß bei der Integration kleine Divisoren auftreten, die besonders große Störungsglieder veranlassen. Wir wollen als Beispiel den sogenannten Hekubatypus wählen, bei dem das genannte Verhältnis μ nahe gleich $\frac{1}{2}$ ist. Setzt man

$$(24)\qquad \frac{1}{1 - \mu} = 2 + \varepsilon,$$

wo ε eine kleine Zahl, jedenfalls $|\varepsilon| \leqq \frac{1}{2}$ ist, so hat man

$$(25)\qquad v = (2 + \varepsilon) H + B,$$

und setzt man noch

$$(26)\qquad H = \varphi - P,$$

so wird

$$(27)\qquad v = 2\varphi + \varepsilon H + B - 2P.$$

Wir wollen die Integration nur für g_2 durchführen, weil die von h_2 ganz ähnlich ist. Es wird

$$(28)\qquad \frac{dg_2}{d\varphi} = \frac{1}{2} \frac{m' \alpha^2}{1 - \mu} \frac{\vartheta^{-1}}{\Delta\varphi} [L_1 \sin (\varepsilon H + B) + L_2 \cos (\varepsilon H + B)],$$

wo

$$L_1 = (3\sin\varphi - \sin 3\varphi)\sin 2P + (3\cos\varphi - \cos 3\varphi)\cos 2P,$$
$$L_2 = (3\sin\varphi - \sin 3\varphi)\cos 2P - (3\cos\varphi - \cos 3\varphi)\sin 2P$$

ist. Aus den Beziehungen (3) und (26) folgt

$$(29)\qquad \begin{aligned} \sin P &= \alpha\sin\varphi, & \cos P &= \Delta\varphi,\\ \cos 2P &= 1-\alpha^2+\alpha^2\cos 2\varphi, & \sin 2P &= 2\alpha\sin\varphi\cdot\Delta\varphi. \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\frac{\vartheta^{-1}}{\Delta\varphi} = \frac{1}{1-\alpha^2}\left(1+\frac{\alpha\cos\varphi}{\Delta\varphi}\right),$$

also

$$(1-\alpha^2)\frac{\vartheta^{-1}}{\Delta\varphi}\cos 2P = 1-\alpha^2+\alpha^2\cos 2\varphi + \frac{1}{\Delta\varphi}\left[\left(\alpha-\frac{1}{2}\alpha^3\right)\cos\varphi + \frac{1}{2}\alpha^3\cos\varphi\right],$$

$$(1-\alpha^2)\frac{\vartheta^{-1}}{\Delta\varphi}\sin 2P = 2\alpha\sin\varphi\cdot\Delta\varphi + \alpha^2\sin 2\varphi$$
$$= \alpha^2\sin 2\varphi + \frac{1}{\Delta\varphi}\left[\left(2\alpha-\frac{3}{2}\alpha^3\right)\sin\varphi + \frac{1}{2}\alpha^3\sin 3\varphi\right]$$

und hiernach

$$(30)\qquad \frac{dg_2}{d\varphi} = \frac{1}{2}\frac{m'\alpha^2}{(1-\alpha^2)(1-\mu)}\left[\left(M_1+\frac{M_3}{\Delta\varphi}\right)\sin(\varepsilon H+B) + \left(M_2+\frac{M_4}{\Delta\varphi}\right)\cos(\varepsilon H+B)\right]$$

mit

$$(31)\qquad \begin{aligned} M_1 &= (3-\alpha^2)\cos\varphi - (1-\alpha^2)\cos 3\varphi,\\ M_2 &= (3-7\alpha^2)\sin\varphi - (1-\alpha^2)\sin 3\varphi,\\ M_3 &= \tfrac{1}{2}(9\alpha-7\alpha^2) - (3\alpha-4\alpha^3)\cos 2\varphi + \tfrac{1}{2}\alpha(1-\alpha^2)\cos 4\varphi,\\ M_4 &= -(3\alpha-\alpha^3)\sin 2\varphi + \tfrac{1}{2}\alpha(1-\alpha^2)\sin 4\varphi. \end{aligned}$$

Bis hierher haben wir von jeder Reihenentwicklung absehen und genaue Ausdrücke aufstellen können. Zur Integration der Gleichung (30) müssen wir allerdings zunächst $\frac{1}{\Delta\varphi} = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\varphi}}$ in eine Reihe nach Vielfachen von φ entwickeln. Man kann nach den aus den älteren Theorien bekannten Entwicklungen setzen:

$$(32)\qquad \frac{1}{\Delta\varphi} = A_0 + 2\sum_1^\infty (-1)^n A_n\cos 2n\varphi,$$

wo

$$A_n = k^n(1+k)\beta_n, \qquad \beta_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2n}\chi d\chi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\chi}}, \qquad k = \frac{2}{\alpha^2}(1-\sqrt{1-\alpha^2})-1$$

ist. Der Modul k ist von der Ordnung $\frac{1}{4}\alpha^2$, und die Reihe konvergiert äußerst stark; für die Berechnung der β_n gibt es Regeln, besonders von Hansen und Gyldén, die leicht zum Ziele führen. Um die Stärke der numerischen Konvergenz zu zeigen, mag der Ausdruck von $\frac{1}{\Delta\varphi}$ für den Planeten Hekuba unter Annahme von $\alpha = 0{,}61633$ angegeben werden:

$$\frac{1}{\Delta\varphi} = 1{,}1229 - 0{,}1337\cos 2\varphi + 0{,}0119\cos 4\varphi - 0{,}0012\cos 6\varphi + 0{,}0001\cos 8\varphi - + \cdots.$$

Man erhält auf diese Weise $\frac{dg_2}{d\varphi}$ in der Form

$$(33)\quad \frac{dg_2}{d\varphi} = \sin(\varepsilon H + B)\sum_0^\infty a_n \cos n\varphi + \cos(\varepsilon H + B)\sum_1^\infty b_n \sin n\varphi.$$

Auf die Angabe der Werte der a_n und b_n verzichten wir hier der Kürze halber, umsomehr als sie leicht herzustellen sind. Es bleibt nun noch übrig, zum Zwecke der Integration von (33) H durch φ zu ersetzen. Auch dies geschieht durch eine äußerst stark konvergente Reihe. Es wird mit Rücksicht auf (26)

$$(34)\quad \begin{aligned}\frac{dg_2}{d\varphi} &= \sin(\varepsilon\varphi + B)\,[\sin\varepsilon P \cdot \Sigma b_n \sin n\varphi + \cos\varepsilon P \cdot \Sigma a_n \cos n\varphi]\\ &\quad + \cos(\varepsilon\varphi + B)\,[\cos\varepsilon P \cdot \Sigma b_n \sin n\varphi - \sin\varepsilon P \cdot \Sigma a_n \cos n\varphi].\end{aligned}$$

Man hat

$$(35)\qquad P = \arcsin(\alpha \sin\varphi)$$

und kann $\sin\varepsilon P$ und $\cos\varepsilon P$ nach Vielfachen von φ entwickeln. Diese Entwicklung konvergiert noch viel stärker als die von $\frac{1}{\Delta\varphi}$. Da die mittlere Bewegung eines Planeten und damit die Größe ε durch weitere Beobachtungen immer genauer bekannt wird, so kann man diese Entwicklung für praktische Zwecke nach Potenzen von ε ordnen. Man hat z. B. für den Planeten Hekuba numerisch

$$(36)\quad \begin{aligned}\sin\varepsilon P &= \varepsilon\,(0{,}6508\sin\varphi - 0{,}0125\sin 3\varphi + 0{,}0007\sin 5\varphi - + \cdots)\\ &\quad + \varepsilon^3(0{,}0352\sin\varphi - 0{,}0128\sin 3\varphi + 0{,}0007\sin 5\varphi - + \cdots)\\ &\quad + \varepsilon^5(0{,}0006\sin\varphi - 0{,}0003\sin 3\varphi + - \cdots)\\ &\quad + \cdots,\\ \cos\varepsilon P &= 1 - \varepsilon^2(0{,}1059 - 0{,}1100\cos 2\varphi + 0{,}0043\cos 4\varphi - 0{,}0003\cos 6\varphi + \cdots)\\ &\quad - \varepsilon^4(0{,}0029 - 0{,}0040\cos 2\varphi - 0{,}0012\cos 4\varphi + - \cdots).\\ &\quad - \cdots.\end{aligned}$$

Entwickelt man nun die Ausdrücke der Gleichung (34), so erhält diese schließlich die Form

$$(37)\quad \frac{dg_2}{d\varphi} = \sin(\varepsilon\varphi + B)\cdot(\alpha_0 + \sum_1^\infty \alpha_n \cos n\varphi) + \cos(\varepsilon\varphi + B)\cdot\sum_1^\infty \beta_n \sin n\varphi.$$

Die Integration ergibt bis auf eine Konstante, die wir hier unterdrücken, weil sie bei den hier betrachteten periodischen Lösungen verschwindet und auch sonst erst bei den höheren von der Exzentrizität abhängenden Gliedern in Betracht kommt,

$$(38)\quad \begin{aligned}g_2 &= -\frac{\alpha_0}{\varepsilon}\cos(\varepsilon\varphi + B) - \frac{1}{2}\sum\frac{\alpha_n + \beta_n}{n+\varepsilon}\cos[(n+\varepsilon)\varphi + B] + \frac{1}{2}\sum\frac{\alpha_n - \beta_n}{n-\varepsilon}\cos[(n-\varepsilon)\varphi + B]\\ &= -\cos(\varepsilon\varphi + B)\cdot\left(\frac{\alpha_0}{\varepsilon} + \sum\frac{n\beta_n - \varepsilon\alpha_n}{n^2-\varepsilon^2}\cos n\varphi\right) + \sin(\varepsilon\varphi + B)\cdot\sum\frac{n\alpha_n - \varepsilon\beta_n}{n^2-\varepsilon^2}\sin n\varphi.\end{aligned}$$

Entsprechend wird

$$h_2 = -\sin(\varepsilon\varphi + B)\cdot\left(\frac{\alpha_0}{\varepsilon} + \sum\frac{n\beta_n - \varepsilon\alpha_n}{n^2-\varepsilon^2}\cos n\varphi\right) - \cos(\varepsilon\varphi + B)\cdot\sum\frac{n\alpha_n - \varepsilon\beta_n}{n^2-\varepsilon^2}\sin n\varphi,$$

und mit Rücksicht auf die Beziehung $\varepsilon\varphi + B = v - (2H - \varepsilon P)$ folgt

$$(39)\quad \begin{aligned}\varrho_2 &= g_2\cos v + h_2\sin v\\ &= -\cos(2H - \varepsilon P)\cdot\left[\frac{\alpha_0}{\varepsilon} + \sum\frac{n\beta_n - \varepsilon\alpha_n}{n^2-\varepsilon^2}\cos n\varphi\right]\\ &\quad - \sin(2H - \varepsilon P)\cdot\sum\frac{n\alpha_n - \varepsilon\beta_n}{n^2-\varepsilon^2}\sin n\varphi,\end{aligned}$$

wo man, wenn man will, durchgehend H und P wieder durch φ ersetzen kann.

Das Hauptglied mit dem Koeffizienten $\frac{\alpha_0}{\varepsilon}$ bedingt vor allem die Exzentrizität der Bahn und die Apsidenbewegung. Es gehört zu den von den Astronomen als große Ungleichungen bezeichneten Gliedern. Ihre Berücksichtigung und Abschätzung bietet bei unserer Methode keine Schwierigkeiten, weil sie stets als erstes Glied einer konvergenten Reihe auftreten. Die vollständige Lösung des Planetenproblems setzt sich aus solchen konvergenten Reihen zusammen, ohne daß begreiflicherweise über den Charakter der Gesamtlösung hier etwas ausgesagt werden kann.

Um die Stärke der numerischen Konvergenz zu zeigen, führe ich die Werte an, die sich für den Hekubatypus ergeben, wenn man $\alpha = 0{,}61633$ annimmt und in den Divisoren der Gleichung (39) $\varepsilon = \frac{1}{2}$ setzt. Daß diese beiden Werte sich nicht genau entsprechen, ist belanglos. Es wird hier

$$\begin{aligned}\varrho_2 = \cos(2H - \varepsilon P)\cdot\Big(&-\frac{1{,}3270}{\varepsilon} + 1{,}3965\cos\varphi + 0{,}6140\cos 2\varphi + 0{,}0596\cos 3\varphi - 0{,}0523\cos 4\varphi \\ &+ 0{,}0068\cos 5\varphi + 0{,}0017\cos 6\varphi - 0{,}0004\cos 7\varphi - 0{,}0001\cos 8\varphi + \cdots\Big) \\ -\sin(2H - \varepsilon P)\cdot(&0{,}0582\sin\varphi - 0{,}2499\sin 2\varphi - 0{,}0349\sin 3\varphi + 0{,}0486\sin 4\varphi \\ &- 0{,}0075\sin 5\varphi - 0{,}0015\sin 6\varphi + 0{,}0004\sin 7\varphi + 0{,}0001\sin 8\varphi + \cdots),\end{aligned}$$

wo alle Zahlen noch mit der störenden Masse $\left(\text{für Jupiter rund } \frac{1}{1047}\right)$ zu multiplizieren sind. Für den Planeten Hekuba ist ε ziemlich klein, etwa $= -0{,}06$, so daß das Hauptglied ziemlich groß wird. Bei sehr kleinen Werten von ε werden auch die Störungen höherer Ordnung entsprechend größer.

Auf weitere Umformung des Ausdrucks (39), wie sie für die praktische Anwendung nützlich sein kann, verzichten wir hier, umsomehr als man hierfür nicht die hier gegebene Ableitung anwenden, sondern von vornherein durchweg rein numerisch vorgehen wird [3]). Auch auf die Integration der Gleichung (11) gehen wir nicht ein, weil sie nichts Neues bietet.

Aus den Ausdrücken (17), (22) und (39) für ψ und ϱ geht hervor, daß diese Größen periodische Funktionen von φ und damit auch von der Zeit sind. Für verschwindende Werte von ε entsteht eine besondere Klasse von periodischen Lösungen, über die zu berichten sich vielleicht ein andermal Gelegenheit findet.

[3]) Vgl. M. Brendel, Zur Theorie der großen Planeten, Astr. Nachr. **250** (1933), S. 177.

Eingegangen im Juli 1934.

Zetafunktionen quadratischer Formen.

Von *Max Deuring* in Leipzig. [1])

§ 1. Einleitung.

Gegenstand dieser Abhandlung sind die Zetafunktionen definiter binärer quadratischer Formen. Ist $Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ eine Form mit der negativen Diskriminante $-D = b^2 - 4ac$, so soll

$$(1_0) \qquad \zeta_Q(s) = \tfrac{1}{2}\sum_{n,m=-\infty}^{+\infty}{}' Q(n, m)^{-s}$$

die *Zetafunktion von Q* heißen. Die Reihe (1_0) ist in jeder Halbebene $\sigma \geqq 1 + \varepsilon > 1$ gleichmäßig konvergent (σ bedeutet den Realteil von s), $\zeta_Q(s)$ ist also durch (1_0) als eine in $\sigma > 1$ reguläre analytische Funktion definiert.

Wir beschränken uns durchweg auf Formen Q mit dem Anfangskoeffizienten $a = 1$; die Diskriminante ist dann $-D = b^2 - 4c$.

In Abschnitt 2 werden diese Funktionen auf ihr Verhalten für große D untersucht. Aus (1_0) erhellt, daß für große D die Reihenglieder mit $m = 0$, deren Summe $\zeta(2s)$ ist, die anderen Glieder überwiegen. (Im Falle $b = 0$, $D = 4c$ wird das besonders deutlich.) Abschätzung der Reihe $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}{}' Q(n, m)^{-s}$ durch ein Integral ergibt (Satz 1) das Resultat

$$\zeta_Q(s) - \zeta(2s) = \frac{O(D^{\frac{1}{2}-\sigma})}{\sigma - 1}$$

gleichmäßig in der Halbebene $\sigma > 1$. $\zeta_Q(s)$ ist in die ganze Ebene fortsetzbar und ist überall regulär bis auf einen Pol erster Ordnung bei $s = 1$ (Satz 2). Die Untersuchung von $\zeta_Q(s)$ für große D wird durch die Funktionalgleichung

$$(2_0) \qquad \left(\frac{D}{4}\right)^{\frac{1}{2}s}\pi^{-s}\Gamma(s)\,\zeta_Q(s) = \left(\frac{D}{4}\right)^{\frac{1}{2}(1-s)}\pi^{-(1-s)}\Gamma(1-s)\,\zeta_Q(1-s)$$

(Satz 2) dahin vereinfacht, daß wir uns auf den Bereich $\sigma \geqq \frac{1}{2}$ beschränken können. Die zum Beweis der Fortsetzbarkeit und von (2_0) benutzte Methode Riemanns, die Zetafunktion mit Hilfe des Gammaintegrals durch eine Thetareihe auszudrücken, ergibt eine Formel für $\zeta_Q(s)$, die zwar ausreicht, um die Gleichung $\lim_{D\to\infty}\zeta_Q(s) = \zeta(2s)$ für jedes s mit $\sigma > \frac{1}{2}$ zu beweisen, die aber wenig geeignet ist, genaueres über die Größenordnung von $\zeta_Q(s) - \zeta(2s)$ herauszufinden. Diesem Zwecke dient die Methode der Fortsetzung von $\zeta_Q(s)$ mittels der Euler-Dirichletschen Summenformel weit besser. Die Eulersche Summenformel liefert als Hauptglied die Funktion

$$(3_0) \qquad \Phi_D(s) = \zeta(2s) + \left(\frac{D}{4}\right)^{\frac{1}{2}-s}\pi^{\frac{1}{2}}\frac{\zeta(2s-1)\,\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)}\,.$$

[1]) Diese Arbeit entstand 1933, während der Verfasser als Sterling-Research-Fellow an der Yale University weilte. Vgl. auch Bull. Amer. Soc. **39** (1933), S. 350.

Diese Funktion ist leicht zu übersehen. Die Differenz $\zeta_Q(s) - \Phi_D(s) = R_Q(s)$ erscheint als eine Summe von Integralen des Typs

$$(4_0) \qquad f(s,k,h) = \int_{\frac{1}{2}i-\infty}^{\frac{1}{2}i+\infty} \frac{(1+z^2)^{-s}dz}{e^{-i(kz-h)}-1}, \qquad k>0,\ h \text{ reell.}$$

Die Aufgabe ist dann, $f(s,k,h)$ für großes k abzuschätzen; sie wird durch Verlagerung des Integrationsweges gelöst. Die Anwendung auf $R_Q(s)$ ergibt, daß im Bereich $\sigma \geqq \frac{1}{2}$ eine Formel

$$(5_0) \qquad R_Q(s) = O\left(e^{-\pi D^{\frac{1}{2}}t^{-1}}\, t^{1-2\sigma}\, \mathrm{Max}\left(1, \frac{t}{\pi D^{\frac{1}{2}}}\right) D^{\frac{1}{2}-\sigma}\right)$$

gilt. Dabei bedeutet t den Imaginärteil von s, und das O ist für große D und t zugleich gemeint. Da $\dfrac{\Phi_D(s)}{\zeta(2s)}$ im Gebiet $\sigma \geqq \frac{1}{2}$, $|t|>1$ beschränkt ist, und auch $\zeta(s)$ in jedem Bereich $\sigma \geqq \frac{1}{2}+\varepsilon > \frac{1}{2}$ unter einer festen Schranke bleibt, so muß das nach der Analogie mit $\zeta(s)$ zu erwartende Anwachsen von $\zeta_Q(s)$ auf vertikalen Geraden $\sigma = \text{const.} < 1$ von $R_Q(s)$ hervorgerufen werden. Die Abhängigkeit der Abschätzungsfunktion von t ist deswegen begreiflich, wenn auch der Exponent von t durch die von der Riemannschen Zetafunktion her bekannten Methoden erniedrigt werden könnte. Es kommt uns aber hauptsächlich auf die Abhängigkeit der Abschätzungsfunktion von D an. $D^{\frac{1}{2}-\sigma}$ konnte nach Satz 1 erwartet werden. Das Wesentliche ist der Faktor $e^{-\pi D^{\frac{1}{2}}t^{-1}}$, nach dem $\zeta_Q(s)$ für t, die gegenüber $D^{\frac{1}{2}}$ klein sind, sehr genau durch die Funktion $\Phi_D(s)$ dargestellt wird. Dabei muß noch erwähnt werden, daß für die kleinen $t \geqq 0$ der Faktor $e^{-\pi D^{\frac{1}{2}}t^{-1}}$ durch $e^{-D^{\frac{1}{2}}\pi/\mathrm{Max}(1,t)}$ zu ersetzen ist.

Im Abschnitt 3 werden die Nullstellen von $\zeta_Q(s)$ untersucht. Aus (2_0) folgt, daß $\zeta_Q(s)$ bei $s = -1, -2, -3, \ldots$ einfache Nullstellen hat. Ferner ist leicht einzusehen, daß $\zeta_Q(s)$ für alle D, die größer als eine gewisse Schranke sind, zwischen $\frac{1}{2}$ und 1, und zwar in der Nähe von 1, eine einfache Nullstelle haben muß, der nach (2_0) eine in Beziehung auf $s = \frac{1}{2}$ spiegelbildlich gelegene Nullstelle in der Nähe von $s = 0$ entspricht. Wir schließen das aus $\lim\limits_{D\to\infty} \zeta_Q(s) = \zeta(2s)$ für $\sigma > \frac{1}{2}$, $s \neq 1$.

Weit interessanter sind die komplexen Nullstellen von $\zeta_Q(s)$. Das Hauptergebnis über sie ist folgendes:

Alle Nullstellen von $\zeta_Q(s)$ im Streifen $0 < t < D^{c_2}$ haben den Realteil $\frac{1}{2}$ (Satz 4). Weiter unten werden wir sehen, daß die Anzahl der Nullstellen von $\zeta_Q(s)$ in einem Streifen $t_1 < t < t_2$ gleich $\dfrac{t_2-t_1}{2\pi}\log D + o(\log D)$ ist für große D; daraus folgt, daß Satz 4 nicht deswegen erfüllt ist, weil der genannte Streifen überhaupt keine Nullstellen enthält. Zum Beweis von Satz 4 wird zuerst an Stelle von $\zeta_Q(s)$ die wenig davon verschiedene Funktion $\Phi_D(s)$ betrachtet. $\Phi_D(s) \neq 0$ für $\sigma > \dfrac{1}{2} + \dfrac{c_3}{\log D}$ schließen wir leicht aus der Definition von $\Phi_D(s)$, wegen des Faktors $D^{\frac{1}{2}-\sigma}$ von $\Phi_D(s) - \zeta(2s)$. Zur Untersuchung der Umgebung von $\sigma = \frac{1}{2}$ setzen wir $\Phi_D(s)$ in die Form $\Phi_D(s) = \zeta(2s)\,(1+f(s))$. $f(s)$ hat auf $\sigma = \frac{1}{2}$ den Betrag 1. Mit Hilfe des Littlewoodschen Satzes

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O\left(\frac{\log t}{\log\log t}\right) \quad \text{für} \quad \sigma \geqq 1 - \frac{2c_3 \log\log t}{\log t}$$

— der mit dem Littlewoodschen Satze $\zeta(s) \neq 0$ für $\sigma \geqq 1 - \frac{2c_3 \log\log t}{\log t}$ unmittelbar zusammenhängt — können wir zeigen, daß, wenn s sich von einem Punkte $\frac{1}{2} + it$ nach rechts bewegt, $|f(s)|$ zunächst abnimmt, bis s den Punkt $\frac{1}{2} + \frac{c_3}{\log D} + it$ erreicht hat; damit ist dann $\Phi_D(s) \neq 0$ für $0 < t < D^{c_3}$ bewiesen.

Der Übergang von $\Phi_D(s)$ zu $\zeta_Q(s)$ wird mit Hilfe des *Satzes von Rouché* bewerkstelligt: Sind $f(z)$ und $g(z)$ in G regulär und gilt auf dem Rand von G überall $|g(z)| < |f(z)|$, so hat $f(z) + g(z)$ in G genau so viele Nullstellen wie $f(z)$. Durch zweimalige Anwendung des Satzes von Rouché wird gezeigt, daß die Nullstellen ϱ von $\zeta_Q(s)$ den Nullstellen ϱ^* von $\Phi_D(s)$ einzeln so zugeordnet werden können, daß für zusammengehörige ϱ und ϱ^* der Abstand $\varrho - \varrho^*$ von der Größenordnung $e^{-D^{\frac{1}{4}}}$ ist. Aus der Funktionalgleichung (2_0) folgt, daß die Nullstellen ϱ von $\zeta_Q(s)$ paarweise spiegelbildlich zur Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$ liegen. Wenn also ein ϱ außerhalb der Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$ gelegen wäre, so müßte ϱ mit der spiegelbildlichen Nullstelle $1 - \bar{\varrho}$ zusammen in der Nähe eines ϱ^* liegen, was wegen der umkehrbar eindeutigen Zuordnung der ϱ^* zu den ϱ nicht möglich ist.

Wird die Anzahl der ϱ mit $0 < |t| < T$ mit $N_Q(T)$ bezeichnet, so gilt die Formel

$$N_Q(T) = \frac{T}{\pi} \log \frac{D}{4\pi^2} + \frac{2T}{\pi} \log T - \frac{2T}{\pi} + O(\log T) + O(\log D),$$

die nach bekannten Vorbildern bewiesen wird. Für $T < D^{c_3}$ läßt sich $N_Q(T)$ auch mittels $\Phi_D(s)$ berechnen, und zwar durch Betrachtung der Argumentänderung von $f(s)$ auf dem Wege von $\frac{1}{2}$ bis $\frac{1}{2} + iT$. Es kommt dabei eine schärfere Restabschätzung heraus, nämlich

$$N_Q(T) = \frac{T}{\pi} \log \frac{D}{4\pi^2} + \frac{2T}{\pi} \log T - \frac{2T}{\pi} + O\left(\frac{\log T}{\log\log T}\right).$$

Bei diesen Restabschätzungen handelt es sich um die Integrale $\int_{2+iT}^{\frac{1}{2}+iT} d \arg \zeta_Q(s)$ und $\int_{2+iT}^{\frac{1}{2}+iT} d \arg \zeta(2s)$, auf die eine von Bäcklund herrührende Methode angewendet wird. Dabei muß noch einmal Gebrauch gemacht werden von den Sätzen über die Größenordnung von $\zeta(s)$ auf vertikalen Geraden, die dem kritischen Streifen angehören (Hardy und Littlewood). Nimmt man die Riemannsche Vermutung $\zeta(s) \neq 0$ für $\sigma > \frac{1}{2}$ als richtig an, so kann die Restabschätzung zu $\Theta_Q(T) < c_{32} (\log T)^{\delta}$ für jedes $\delta > 0$ verschärft werden. Für das Restglied in der entsprechenden Formel für $\zeta(s)$ gilt eine solche Abschätzung nicht — unter Annahme der Riemannschen Vermutung —, vielmehr ist dieses Restglied $= \Omega((\log T)^{\frac{1}{2}-\delta})$ für jedes positive δ.

Im Laufe der Untersuchung tritt eine Reihe von positiven Konstanten auf, auf deren Werte es nicht ankommt, sie werden mit $c_1, c_2, \ldots$ bezeichnet. Die Zählung beginnt in Abschnitt 3 von neuem.

Literaturhinweise sind an den betreffenden Stellen eingefügt. Da es sich durchweg um Arbeiten über die Riemannsche Zetafunktion handelt, so ist jedesmal auch die Stelle in Titchmarshs Werk: The Zeta-Function of Riemann, Cambridge Tracts in Math. and Math. Physics No. 26 angeführt. Dies Buch wird kurz mit „Titchmarsh“ zitiert.

§ 2. Verhalten der Funktion $\zeta_Q(s)$ für große Diskriminanten.

1. Die quadratische Form $Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ habe reelle Koeffizienten und ihre Diskriminante

$$-D = b^2 - 4ac$$

sei negativ, ferner sei $a > 0$, $Q(x, y)$ also positiv definit. Durch

$$\zeta_Q(s) = \tfrac{1}{2}\sum_{n,m=-\infty}^{+\infty}{}' Q(n, m)^{-s} \tag{1}$$

wird die *Zetafunktion* der Form Q erklärt. Die Reihe ist für $\sigma = \mathbf{R}(s) \geqq 1 + \varepsilon > 1$ absolut und gleichmäßig konvergent (wie man leicht einsieht), $\zeta_Q(s)$ ist also im Bereich $\mathbf{R}(s) = \sigma > 1$ definiert und analytisch. Q kann ohne Änderung von $\zeta_Q(s)$ durch jede äquivalente Form ersetzt werden (eigentlich oder uneigentlich äquivalent), demnach ist es keine Einschränkung, wenn wir Q von vornherein reduziert annehmen und $b \geqq 0$. Das läuft auf die Bedingungen

$$c \geqq a > 0, \quad a \geqq b \geqq 0$$

hinaus. Da ferner

$$\zeta_Q(s) = \tfrac{1}{2}a^{-s}\sum_{n,m=-\infty}^{+\infty}{}' \left(n^2 + \frac{b}{a}nm + \frac{c}{a}m^2\right)^{-s}$$

ist, so können und wollen wir uns ein für allemal auf Formen

$$Q(x, y) = x^2 + bxy + cy^2 \tag{2}$$

mit

$$c \geqq 1, \quad 0 \leqq b \leqq 1 \tag{3}$$

beschränken. Die Diskriminante ist jetzt.

$$-D = b^2 - 4c. \tag{4}$$

2. Satz 1. *Für $\sigma > 1$ gilt*

$$|\zeta_Q(s) - \zeta(2s)| \leqq \left(\frac{D}{4}\right)^{\frac{1}{2}-s}\left(c_1 + \frac{c_2}{\sigma - 1}\right).$$

Beweis. In der Halbebene $\sigma > 1$ ist

$$2\zeta_Q(s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}'(n^2)^{-s} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}'\sum_{m=-\infty}^{+\infty}{}' Q(n, m)^{-s} + c^{-s}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}{}'(m^2)^{-s}.$$

Daher

$$2(\zeta_Q(s) - \zeta(2s)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}'\sum_{m=-\infty}^{+\infty}{}' Q(n, m)^{-s} + c^{-s}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}{}'(m^2)^{-s}.$$

Es ist

$$c = \tfrac{1}{4}(D + b^2) \geqq \tfrac{1}{4}D, \quad |\zeta(2s)| \leqq \zeta(2\sigma) \leqq \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6},$$

demnach

$$|c^{-s}\zeta(2s)| \leqq \frac{\pi^2}{6}(\tfrac{1}{4}D)^{-\sigma}.$$

Zur Abschätzung der Doppelsumme wollen wir den Betrag eines einzelnen Summanden $Q(n, m)^{-s}$ durch ein Integral $\iint Q(x, y)^{-\sigma}\,dxdy$ abschätzen. Der Integrationsbereich soll ein Parallelogramm sein, dessen eine Ecke der Punkt $p_{n,m}$ mit den Koordinaten $x = n$,

$y = m$ ist, während in allen seinen übrigen Punkten

$$Q(x, y) \leqq Q(n, m)$$

ist. Dazu wählen wir die Parallelogrammseiten parallel zu den Tangenten t_1, t_2 der Ellipse $Q(x, y) = Q(n, m)$ in ihren Schnittpunkten mit den Achsen. Eines von den vier Parallelogrammen mit zu t_1 und t_2 parallelen Seiten der Länge $\frac{1}{4}$, die eine Ecke in $p_{n,m}$ haben, liegt, falls n und m von Null verschiedene ganze Zahlen sind, innerhalb der Fläche $Q(x, y) \leqq Q(n, m)$, aber außerhalb des Gebietes $|x| > \frac{1}{2}$, $|y| > \frac{1}{2}$. Dies Parallelogramm nennen wir $G_{n,m}$. Die $G_{n,m}$ überdecken sich nicht und sind kongruent. Der Inhalt eines $G_{n,m}$ ist $\frac{1}{4} \sin(\alpha_1 - \alpha_2)$, wenn α_i den Winkel bedeutet, den t_i mit der positiven x-Achse bildet. Man findet leicht

$$\sin(\alpha_1 - \alpha_2) = \left[1 + \left(\frac{2b\,(1+c)}{4c - b^2}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}},$$

nach (4) also

$$\sin(\alpha_1 - \alpha_2) = \left[1 + b^2\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{D} + \frac{b^2}{2D}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}},$$

und da nach (3) $D \geqq 3$ ist, gilt

$$\sin(\alpha_1 - \alpha_2) \geqq \left[1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2 \cdot 3}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{5}.$$

Der Flächeninhalt eines $G_{n,m}$ ist also $\geqq \frac{3}{20}$. Daher gilt

$$|Q(n, m)^{-s}| \leqq \tfrac{20}{3} \iint\limits_{G_{n,m}} Q(x, y)^{-\sigma}\, dx dy \tag{5}$$

und

$$\left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \sum_{m=-\infty}^{+\infty}{}' Q(n, m)^{-s}\right| \leqq \tfrac{20}{3} \iint\limits_{|x|\geqq\frac{1}{2},\,|y|\geqq\frac{1}{2}} Q(x, y)^{-\sigma} dx\, dy \leqq \tfrac{20}{3} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{|y|\geqq\frac{1}{2}} Q(x, y)^{-\sigma} dx dy.$$

Es ist

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{\pm\frac{1}{2}}^{\pm\infty} Q(x, y)^{-\sigma}\, dx\, dy &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{\pm\frac{1}{2}}^{\pm\infty} ((x + \tfrac{1}{2} by)^2 + \tfrac{1}{4} Dy^2)^{-\sigma}\, dx\, dy \\
&= (\tfrac{1}{4} D)^{\frac{1}{2}-\sigma} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{\pm\frac{1}{2}}^{\pm\infty} (1 + z^2)^{-\sigma} |y|^{1-2\sigma}\, dz\, dy \\
&= \pm (\tfrac{1}{4} D)^{\frac{1}{2}-\sigma} \frac{2^{2\sigma-3}}{\sigma - 1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1 + z^2)^{-\sigma}\, dz.
\end{aligned}$$

Dabei wurde $x + \frac{1}{2} by = (\frac{1}{4} D)^{\frac{1}{2}} yz$ gesetzt. Hieraus folgt

$$\left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \sum_{m=-\infty}^{+\infty}{}' Q(n, m)^{-s}\right| \leqq (\tfrac{1}{4} D)^{\frac{1}{2}-\sigma} \frac{20 \cdot 2^{2\sigma-2}}{3(\sigma - 1)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1 + z^2)^{-\sigma}\, dz,$$

und zusammen mit der oben angegebenen Abschätzung für $c^{-s}\,\zeta(2s)$ ergibt sich jetzt die die Behauptung des Satzes.

3. Satz 2. *$\zeta_Q(s)$ ist in die ganze s-Ebene analytisch fortsetzbar und ist überall regulär mit Ausnahme eines Poles erster Ordnung bei $s = 1$. Es gilt die Funktionalgleichung*

$$\pi^{-s}(\tfrac{1}{4} D)^{\frac{1}{2}s}\, \Gamma(s)\, \zeta_Q(s) = \pi^{-(1-s)}\, (\tfrac{1}{4} D)^{\frac{1}{2}(1-s)}\, \Gamma(1 - s)\, \zeta_Q(1 - s).$$

Beweis. Wir gehen ähnlich vor wie zum Beweis der Riemannschen Gleichung

$$\pi^{-\frac{1}{2}s}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-\frac{1}{2}(1-s)}\,\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s),$$

von der wir später auch noch Gebrauch machen werden.

Es ist

$$\pi^{-s}(\tfrac{1}{4}D)^{\frac{1}{2}s}\,\Gamma(s)\,Q(n,m)^{-s} = \int_0^\infty u^{s-1}e^{-2\pi D^{-\frac{1}{2}}Q(n,m)u}\,du.$$

Daraus ergibt sich für $\sigma > 1$

$$2\pi^{-s}(\tfrac{1}{4}D)^{\frac{1}{2}s}\,\Gamma(s)\zeta_Q(s) = \int_0^\infty u^{s-1}\sum_{n,m=-\infty}^{+\infty}{}' e^{-2\pi D^{-\frac{1}{2}}Q(n,m)u}du.$$

Denn da für reelles $s = \sigma$ die Ausdrücke $u^{s-1}e^{-2\pi D^{-\frac{1}{2}}Q(n,m)u}$ positiv sind, so darf in diesem Falle die Summation mit der Integration vertauscht werden. Andererseits ist das Integral in der letzten Formel für $\sigma > 1 + \varepsilon$ absolut und gleichmäßig konvergent, stellt also für $\sigma > 1$ eine analytische Funktion dar, die auf der reellen Achse, also überhaupt, mit der linken Seite übereinstimmt.

Das Integral rechts zerlegen wir in $\int_0^1$ und $\int_1^\infty$. Das $\int_1^\infty$ konvergiert in jedem beschränkten s-Bereich gleichmäßig, ist also eine ganze Funktion von s. Für $\int_0^1$ schreiben wir

$$\int_0^1 u^{s-1}\sum_{n,m=-\infty}^{+\infty}{}' e^{-2\pi D^{-\frac{1}{2}}Q(n,m)u}\,du = \int_0^1 u^{s-1}\sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi D^{-\frac{1}{2}}Q(n,m)u}\,du - \int_0^1 u^{s-1}\,du$$
$$= \int_0^1 u^{s-1}\sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi D^{-\frac{1}{2}}Q(n,m)u}\,du - \frac{1}{s}.$$

Die Reihe unter dem Integralzeichen, in der über *alle* ganzzahligen n und m summiert wird, ist eine spezielle Thetareihe. Für sie gilt die folgende Transformationsformel

$$\sum_{n,m=-\infty}^{+\infty}{}' e^{-2\pi D^{-\frac{1}{2}}Q(n,m)u} = u^{-1}\sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi D^{-\frac{1}{2}}Q(-m,n)u^{-1}}.$$

Setzen wir dies in unsere Gleichung für $\int_0^1$ ein, so kommt

$$\int_0^1 u^{s-1}\sum_{n,m=-\infty}^{+\infty}{}' e^{-2\pi D^{-\frac{1}{2}}Q(n,m)u}\,du = \int_0^1 u^{s-2}\sum_{n,m=-\infty}^{+\infty}{}' e^{-2\pi D^{-\frac{1}{2}}Q(-m,n)u^{-1}}\,du - \frac{1}{1-s} - \frac{1}{s}.$$

In dem letzten Integral führen wir $\frac{1}{u}$ an Stelle von u als Integrationsvariable ein und schreiben dann u statt $\frac{1}{u}$. Schließlich dürfen wir $Q(n,m)$ statt $Q(-m,n)$ setzen. Auf diese Weise entsteht die Gleichung

$$(7)\qquad 2\pi^{-s}\left(\frac{D}{4}\right)^{\frac{s}{2}}\Gamma(s)\,\zeta_Q(s) = \int_1^\infty [u^{-s} + u^{-(1-s)}]\sum_{n,m=-\infty}^{+\infty}{}' e^{-2\pi D^{-\frac{1}{2}}Q(n,m)u}\,du - \left[\frac{1}{s} + \frac{1}{1-s}\right],$$

aus der wir entnehmen, daß $\pi^{-s}\left(\frac{D}{4}\right)^{\frac{s}{2}}\Gamma(s)\zeta_Q(s)$ bis auf Pole erster Ordnung bei $s = 0$ und $s = 1$ in der ganzen Ebenen regulär ist. Weil $\Gamma(s)$ für $s = 1$ regulär und von Null verschieden ist, aber bei $s = 0, -1, -2, \ldots$ Pole erster Ordnung hat, so ergibt sich, daß $\zeta_Q(s)$ bei $s = 1$ einen Pol erster Ordnung hat, bei $s = 0$ regulär und von Null verschieden ist und für $s = -1, -2, \ldots$ von der ersten Ordnung Null wird. Überall sonst ist $\zeta_Q(s)$

regulär. Die rechte Seite von (7) bleibt ungeändert, wenn man s durch $1-s$ ersetzt: auf die linke Seite übertragen, bedeutet das die Funktionalgleichung, die bewiesen werden sollte.

4. Satz 1 gibt über das Verhalten von $\zeta_Q(s)$ für große D Aufschluß für alle s der Halbebene $\sigma > 1$. Nach Satz 2 ist auch das Verhalten von $\zeta_Q(s)$ für große D für die s mit $\sigma < 0$ bekannt.

Wir gehen jetzt daran, $\zeta_Q(s)$ im Streifen $0 \leqq \sigma \leqq 1$ für große D zu untersuchen. Es zeigt sich — wie schon in der Einleitung erwähnt —, daß wir dabei gezwungen werden, $\zeta_Q(s)$ für große t abzuschätzen. Die beiden Fragen nach dem Verhalten von $\zeta_Q(s)$ für große D und für große t sind eng verknüpft.

Zur Fortsetzung von $\zeta_Q(s)$ in den Streifen $0 \leqq \sigma \leqq 1$ benutzen wir an Stelle von (7) eine Umformung mittels der Eulerschen Summenformel. Dabei entsteht als Hauptglied die Funktion

$$\Phi_D(s) = \zeta(2s) + \pi^{\frac{1}{2}}\left(\frac{D}{4}\right)^{\frac{1}{2}-s} \frac{\Gamma(s-\frac{1}{2})\,\zeta(2s-1)}{\Gamma(s)}. \tag{8}$$

Diese Funktion übersehen wir für große D vollständig. Auch ihr Verhalten für große t ist bekannt in dem Fall, daß der Realteil σ von s größer als $\frac{1}{2}$ ist. Den Bereich $\sigma < \frac{1}{2}$ erfassen wir dann auch, weil die Funktionalgleichung

$$\pi^{-s}\left(\frac{D}{4}\right)^{\frac{1}{2}s} \Gamma(s)\,\Phi_D(s) = \pi^{-(1-s)}\left(\frac{D}{4}\right)^{\frac{1}{2}(1-s)} \Gamma(1-s)\,\Phi_D(1-s)$$

gilt. Diese Funktionalgleichung ergibt sich, indem wir in dem Ausdruck (8) für $\Phi_D(s)$ die Funktion $\zeta(2s-1)$ mittels der Gleichung (6) umformen, denn auf diese Weise entsteht

$$\pi^{-s}\left(\frac{D}{4}\right)^{\frac{1}{2}s} \Gamma(s)\,\Phi_D(s) = \pi^{-s}\left(\frac{D}{4}\right)^{\frac{1}{2}s} \Gamma(s)\,\zeta(2s) + \pi^{-(1-s)}\left(\frac{D}{4}\right)^{\frac{1}{2}(1-s)} \Gamma(1-s)\,\zeta(2(1-s)).$$

Wir kommen zur Umformung von $\zeta_Q(s)$. Die Eulersche Summenformel ergibt für jedes $m \neq 0$

$$\sum_{n=-N}^{+N} Q(n, m)^{-s} = \int_{-N}^{+N} Q(x, m)^{-s}\,dx + \tfrac{1}{2}\left(Q(N, m)^{-s} + Q(-N, m)^{-s}\right)$$
$$- 2\int_{-N}^{+N} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi\nu x}{(2\pi\nu)^2} \frac{d^2}{dx^2} Q(x, m)^{-s}\,dx\,.$$

Für $\sigma > \frac{1}{2}$ folgt daraus

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} Q(n, m)^{-s} = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(x, m)^{-s}\,dx - 2\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi\nu x}{(2\pi\nu)^2} \frac{d^2}{dx^2} Q(x, m)^{-s}\,dx.$$

Ganz rechts können wir die Summation mit der Integration vertauschen, denn Reihe und Integral bleiben konvergent, wenn man die Reihenglieder durch ihre Beträge ersetzt. Nach dieser Vertauschung integrieren wir zweimal partiell

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} Q(n, m)^{-s} = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(x, m)^{-s}\,dx + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos 2\pi\nu x\, Q(x, m)^{-s}\,dx.$$

In den beiden Integralen transformieren wir $Q(x, m)$ durch die Substitution

$x + \frac{1}{2}bm = \left(\frac{D}{4}\right)^{\frac{1}{2}} mz$ auf die Form $\frac{D}{4} m^2 (1 + z^2)$. Das ergibt

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} Q(n, m)^{-s} = \left(\frac{D}{4}\right)^{\frac{1}{2}-s} |m|^{1-2s} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + z^2)^{-s}\, dz + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\left(\pi\nu m \left(zD^{\frac{1}{2}} - b\right)\right) (1 + z^2)^{-s}\, dz \right\}.$$

Das erste Integral in dieser Formel hat den Wert

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1 + z^2)^{-s}\, dz = \sqrt{\pi}\, \frac{\Gamma(s - \frac{1}{2})}{\Gamma(s)}.$$

Setzen wir dieses ein und summieren über m, so ergibt das erste Glied unserer letzten Formel zusammen mit $\zeta(2s)$ gerade die Funktion $\Phi_D(s)$, die wir oben eingeführt hatten. Für die Differenz $\zeta_Q(s) - \Phi_D(s)$ bleibt

$$R_Q(s) = \zeta_Q(s) - \Phi_D(s) = \left(\frac{D}{4}\right)^{\frac{1}{2}-s} \sum_{m=-\infty}^{+\infty}{}' |m|^{1-2s} \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + z^2)^{-s} \cos \pi\nu m \left(zD^{\frac{1}{2}} - b\right) dz$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{D}{4}\right)^{\frac{1}{2}-s} \sum_{m=-\infty}^{+\infty}{}' |m|^{1-2s} \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(1 + z^2)^{-s} e^{i\pi\nu m\left(zD^{\frac{1}{2}} - b\right)} + (1 + z^2)^{-s} e^{-i\pi\nu m\left(zD^{\frac{1}{2}} - b\right)} \right] dz.$$

Die Funktion $(1 + z^2)^{-s}$, für reelles z durch $(1 + z^2)^{-s} = e^{-s \log(1+z^2)}$ mit reellem Logarithmus erklärt, kann analytisch fortgesetzt werden in das Gebiet, das aus der vollen z-Ebene entsteht, indem wir sie längs der beiden Halbstrahlen aufschlitzen, die von den Punkten i und $-i$ in entgegengesetzten Richtungen ins Unendliche führen und die Strecke zwischen i und $-i$ frei lassen.

Wenn $m > 0$ ist, können wir in dem ersten Integral den Integrationsweg parallel nach oben verschieben, soweit der Regularitätsbereich des Integranden das zuläßt. In

$$\int_{\frac{i}{2}-\infty}^{\frac{i}{2}+\infty} (1 + z^2)^{-s} e^{i\pi\nu m\left(zD^{\frac{1}{2}} - b\right)}\, dz$$

können wir aber Summation und Integration vertauschen, weil Reihe und Integral konvergent bleiben, wenn man den Integranden durch seinen Betrag ersetzt. Nach dieser Vertauschung kann die Summation über ν ausgeführt werden. Verfährt man im Fall $m < 0$ und mit dem zweiten Integral in entsprechender Weise, so erhält man

$$R_Q(s) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{D}{4}\right)^{\frac{1}{2}-s} \sum_{m=-\infty}^{+\infty}{}' |m|^{1-2s} \left[\int_{\frac{i}{2}-\infty}^{\frac{i}{2}+\infty} (1 + z^2)^{-s} \frac{dz}{e^{-i\pi|m|\left(zD^{\frac{1}{2}} - b\right)} - 1} + \int_{-\frac{i}{2}-\infty}^{-\frac{i}{2}+\infty} (1 + z^2)^{-s} \frac{dz}{e^{i\pi|m|\left(zD^{\frac{1}{2}} - b\right)} - 1} \right].$$

Wir führen jetzt die Funktion

$$(9) \qquad f(s, k, h) = \int_{\frac{i}{2}-\infty}^{\frac{i}{2}+\infty} \frac{(1 + z^2)^{-s}\, dz}{e^{-i(kz-h)} - 1}, \qquad k > 0,\ h \text{ reell},$$

ein. Für $R_Q(s)$ haben wir den Ausdruck

$$(10)\quad R_Q(s) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{D}{4}\right)^{\frac{1}{2}-s} \sum_{m=-\infty}^{+\infty}{}' |m|^{1-2s}\left(f(s, \pi|m| D^{\frac{1}{2}}, \pi|m| b) + f(s, \pi|m| D^{\frac{1}{2}}, -\pi|m| b)\right).$$

Im zweiten Integral wurde $-z$ als Integrationsvariable aufgefaßt.

5. Die Aufgabe ist jetzt, $f(s, k, h)$ für große t und große k zu untersuchen. h hat, wie leicht zu sehen, keinen großen Einfluß. $f(s, k, h)$ ist eine ganze Funktion von s. Denn nach dem Cauchyschen Integralsatze kann man den Integrationsweg abändern in eine negativ durchlaufene Schleife S um den von i ausgehenden Schlitz, und das neue Integral $\int_S$ ist in jedem beschränkten s-Bereiche gleichmäßig konvergent. Nimmt man an, daß S ganz oberhalb der Geraden $\mathfrak{I}(z) = \frac{1}{2}$ liegt, so gilt folgende Ungleichung

$$|f(s, k, h)| \leqq \int_S \frac{|(1+z^2)^{-s}|\,|dz|}{|e^{-i(kz-h)} - 1|} \leqq e^{2\pi t}\left[2\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{(u^4+4)^{-\frac{1}{2}\sigma}\,du}{e^{ku}-1} + \int_{-1}^{+1} \frac{(\frac{9}{16} + \frac{5}{2}v^2 + v^4)^{-\frac{1}{2}\sigma}\,dv}{e^{\frac{1}{2}k}-1}\right]$$

(S geradlinig von $-1 + i\infty$ nach $-1 + \frac{1}{2}i$, nach $1 + \frac{1}{2}i$, und schließlich nach $1 + i\infty$).

Aus dieser Ungleichung folgt die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (10) für $R_Q(s)$ in jedem beschränkten s-Bereich. $R_Q(s)$ ist demnach eine ganze Funktion. Das kann man mittels Satz 2 auch leicht aus der Definition von $R_Q(s)$ schließen. Hier kommt es nur darauf an, daß (10) ein in der ganzen s-Ebene gültiger Ausdruck für $R_Q(s)$ ist.

Aus Satz 2 und (8) ergibt sich die Funktionalgleichung

$$\left(\frac{D}{4}\right)^{\frac{1}{2}-s} \pi^{-s}\,\Gamma(s)\,R_Q(s) = \left(\frac{D}{4}\right)^{\frac{1}{2}-(1-s)} \pi^{-(1-s)}\,\Gamma(1-s)\,R_Q(1-s).$$

Daher genügt die Untersuchung von $R_Q(s)$ im Bereich $\sigma \leqq \frac{1}{2}$.

Für $\sigma < 1$ können wir den Schleifenweg S ganz auf die beiden Schlitzufer legen. Da der Integrand in der Formel (9) sich um einen Faktor $e^{2\pi i s}$ ändert, wenn der Punkt $s = i$ einmal positiv umlaufen wird, so gilt für $\sigma < 1$

$$f(s, k, h) = (e^{-2\pi i s} - 1)\int_i^{i\infty} \frac{(1+z^2)^{-s}\,dz}{e^{-i(kz-h)} - 1},$$

das Integral auf dem linken Schlitzufer genommen. Durch Einführung der neuen Integrationsvariablen $u = \frac{z}{i}$ erhalten wir

$$(11)\qquad f(s, k, h) = 2\sin \pi s \int_1^{\infty} \frac{(u^2-1)^{-s}\,du}{e^{ku+hi} - 1}.$$

Wir gehen nun daran, durch passende Abänderung des Integrationsweges obere Abschätzungen für dieses Integral zu finden.

Wir integrieren zunächst von 1 geradlinig bis zu einer zwischen 0 und 1 gelegenen Zahl ε. Es ist

$$\int_1^{\varepsilon} \frac{(u^2-1)^{-s}\,du}{e^{ku+ih} - 1} = -(-1)^{-s}\int_{\varepsilon}^{1} \frac{(1-u^2)^{-s}\,du}{e^{ku+ih} - 1}.$$

Im Integrationsintervall gilt die Abschätzung

$$\frac{1}{e^{ku}-1} \leqq e^{-ku}\,\frac{1}{1-e^{-k\varepsilon}} = e^{-ku}\,\frac{1}{k\varepsilon - \frac{(k\varepsilon)^2}{2!} - \dots}$$

Dieser Ausdruck ist für $k\varepsilon \geqq 1$ nicht größer als

$$e^{-ku}\frac{1}{1-e^{-1}} < 3\,e^{-ku},$$

und für $k\varepsilon \leqq 1$ ist er nicht größer als

$$e^{-ku}\frac{1}{k\varepsilon\left(1-\frac{1}{2!}-\frac{1}{4!}-\ldots\right)} < \frac{3\,e^{-ku}}{k\varepsilon}.$$

Demnach ist

$$\left|\int_i^{\varepsilon}\frac{(u^2-1)^{-s}\,du}{e^{ku+hi}-1}\right| \leqq 3e^{-\pi t}\operatorname{Max}\left(1,\frac{1}{\varepsilon k}\right)\int_{\varepsilon}^{1}(1-u^2)^{-\sigma}e^{-ku}\,du \tag{12}$$

$$\leqq \frac{3\cdot 2}{1-\sigma}e^{-\pi t-\varepsilon k}\operatorname{Max}\left(1,\frac{1}{\varepsilon k}\right).$$

Von ε aus soll der Integrationsweg die gerade Linie

$$\mathfrak{R}(u) = \frac{\mathfrak{I}(u)}{t} + \varepsilon$$

sein. Zur Abkürzung setzen wir $\mathfrak{I}(u) = v$. Dann ist

$$|du|^2 = (dv)^2\,(1 + t^{-2}),$$

also

$$|du| < 2dv,$$

wenn wir von vornherein $t < 10$ voraussetzen. Der Betrag von

$$(u^2-1)^{-s} = e^{2\pi i s}(1-u^2)^{-s}$$

ist

$$\left\{\left[1+v^2-\left(\varepsilon+\frac{v}{t}\right)^2\right]^2+4v^2\left(\varepsilon+\frac{v}{t}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}\sigma} e^{-\pi t-\operatorname{tang}\frac{\mathfrak{I}(1-u^2)}{\mathfrak{R}(1-u^2)}}.$$

Die Klammer { } ist

$$A = \left[1-\frac{2v\varepsilon}{t}+v^2(1-t^{-2})\right]^2+4v^2\left(\varepsilon+\frac{v}{t}\right)^2.$$

Wegen

$$\tfrac{1}{2}(1+v^2) < \frac{99}{100}v^2-\frac{v}{5}+1 < v^2(1-t^{-2})-\frac{2v\varepsilon}{t}+1 < v^2+1$$

gilt

$$(1+v^2)^2 < A < 5(1+v^2)^2.$$

Das Argument des Arcustangens ist

$$\frac{2vt(v+t\varepsilon)}{v^2+2vt\varepsilon+t^2\varepsilon^2-t^2(v^2+1)}.$$

Wir wählen nun $\varepsilon = \frac{1}{t}$. Dann wird dieses Argument gleich

$$-\frac{2}{t}\frac{v(v+1)}{(v^2+1)-t^{-2}(v+1)^2}.$$

Dies ist nicht kleiner als

$$\frac{-2v(v+1)}{t\left[\frac{(v+1)^2}{2}-\frac{1}{100}(v+1)^2\right]} = -\frac{2}{t}\frac{v}{v+1}\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{100}} \geqq -\frac{6}{t}.$$

Daher ist

$$|(u^2-1)^{-s}| \leqq e^6\, 5^{\frac{1}{2}|\sigma|}(1+v^2)^{-\sigma}e^{-\pi t}.$$

Ferner ist auf dem ganzen Integrationsweg

$$\left|\frac{1}{e^{ku+hi}-1}\right| \leqq 3\,\mathrm{Max}\left(1,\frac{1}{\varepsilon k}\right)e^{-k\left(\varepsilon+\frac{v}{t}\right)} \leqq 3e^{\frac{k}{t}(1+v)}\,\mathrm{Max}\left(1,\frac{t}{k}\right).$$

Daher gilt die Ungleichung

$$(13)\quad \left|\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{(u^2-1)^{-s}du}{e^{ku+hi}-1}\right| \leqq e^{-\pi t}\,1500\cdot 5^{\frac{1}{2}|\sigma|}e^{-\frac{k}{t}}\,\mathrm{Max}\left(1,\frac{k}{t}\right)\int_0^{\infty}(1+v^2)^{-\sigma}e^{-\frac{kv}{t}}dv\,.$$

Das Integral rechts trennen wir in zwei Integrale von 0 bis 1 und von 1 bis ∞. Im ersten Integral ersetzen wir den Integranden durch das Maximum von $(1+v^2)^{-\sigma}$, im zweiten ersetzen wir $1+v^2$ durch v^2 oder durch $2v^2$, je nachdem σ positiv ist oder nicht. Als obere Schranke erhalten wir so

$$\mathrm{Max}(1,2^{-\sigma})\,(1+\int_1^{\infty}v^{-2\sigma}e^{-\frac{kv}{t}}dv).$$

Für $\sigma \leqq 0$ schätzen wir so ab

$$(14a)\qquad \int_1^{\infty}v^{-2\sigma}e^{-\frac{kv}{t}}dv < \int_0^{\infty}v^{-2\sigma}e^{-\frac{kv}{t}}dv = \Gamma(1-2\sigma)\left(\frac{t}{k}\right)^{1-2\sigma},$$

für $0<\sigma\leqq 1$ dagegen einfach so:

$$(14b)\qquad \int_1^{\infty}v^{-2\sigma}e^{-\frac{kv}{t}}dv < \int_1^{\infty}e^{-\frac{k}{t}} < \frac{t}{k}.$$

Aus den Formeln (11), (12), (13), (14) erhalten wir also

$$(15)\quad |f(s,k,h)| < \frac{|\sin\pi s|}{e^{\pi t}}\,c_1\,c_2^{-\sigma}\,\frac{e^{-\frac{k}{t}}}{1-\sigma}\,\mathrm{Max}\left(1,\frac{t}{k}\right)^{\mathrm{Max}(2,2(1-\sigma))}(2-\sigma)^{\frac{1}{2}-2\sigma}.$$

c_1 und c_2 sind positive Konstanten; die Formel gilt für $\sigma<1, t>10$. Die Gammafunktion ist gleich mittels der Stirlingschen Formel

$$\Gamma(x)\sim\sqrt{2\pi}\,x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}$$

nach oben abgeschätzt worden.

Um auch die kleinen Werte von t zu erfassen, schätzen wir den Integralausdruck (11) für $f(s,k,h)$ ab, ohne auf die Abhängigkeit von t zu achten

$$|f(s,k,h)| \leqq |\sin\pi s|\int_1^{\infty}\frac{(u^2-1)^{-\sigma}\,du}{e^{ku}-1} \leqq 3\,|\sin\pi s|\,\mathrm{Max}\left(1,\frac{1}{k}\right)e^{-k}\int_0^{\infty}e^{-kv}(v^2+2v)^{-\sigma}\,dv$$

$$\leqq 3\,|\sin\pi s|\,\mathrm{Max}\left(1,\frac{1}{k}\right)e^{-k}\,\mathrm{Max}\,(1,3^{-\sigma})\left\{\int_0^1 v^{-\sigma}\,dv+\int_1^{\infty}v^{-2\sigma}e^{-kv}\,dv\right\}.$$

Setzt man jetzt $\mathrm{Max}\,(1,|t|\,)=t_1$, so kann man dies Resultat mit (15) zusammenfassen in eine im ganzen Bereich $\sigma<1$ gültige Formel

$$(16)\quad |f(s,k,h)| < c_1\,c_2^{-\sigma}\,\frac{(2-\sigma)^{\frac{1}{2}-2\sigma}}{1-\sigma}\,e^{-\frac{k}{t_1}}\,\mathrm{Max}\left(1,\frac{t_1}{k}\right)^{2\,\mathrm{Max}\,(1,\,1-\sigma)}\frac{|\sin\pi s|}{e^{\pi t_1}}.$$

6. Diese Formel benutzen wir zur Abschätzung von $R_Q(s)$. Aus (10) und (16) folgt

$$|R_Q(s)| < \frac{|\sin\pi s|}{e^{\pi t_1}}\,c_3\,c_4^{-\sigma}\,\frac{(2-\sigma)^{\frac{1}{2}-2\sigma}}{1-\sigma}\,D^{\frac{1}{2}-\sigma}\sum_{m=1}^{\infty}m^{1-2\sigma}e^{-\pi mD^{\frac{1}{2}}t_1^{-1}}\,\mathrm{Max}\left(1,\frac{t_1}{\pi mD^{\frac{1}{2}}}\right)^{2\,\mathrm{Max}\,(1,\,1-\sigma)}$$

$$(17)\quad |R_Q(s)| < \frac{|\sin\pi s|}{e^{\pi t_1}}\,c_3\,c_4^{-\sigma}\,\frac{(2-\sigma)^{\frac{1}{2}-2\sigma}}{1-\sigma}\,D^{\frac{1}{2}-\sigma}e^{-\pi mD^{\frac{1}{2}}t_1^{-1}}\,\mathrm{Max}\left(1,\frac{t_1}{\pi D^{\frac{1}{2}}}\right)^{2\,\mathrm{Max}(1,\,1-\sigma)}\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)^{1-2\sigma}e^{-\pi mD^{\frac{1}{2}}t_1^{-1}}.$$

Die Summe $\sum_{m=0}^{\infty}(1+m)^{1-2\sigma}\,e^{-\pi m D^{\frac{1}{2}}t_1^{-1}}$ vergleichen wir mit dem Integral

$$\int_0^{\infty}(1+x)^{1-2\sigma}\,e^{-\pi x D^{\frac{1}{2}}t_1^{-1}}\,dx.$$

Das Maximum des Integranden liegt bei $x=\dfrac{(1-2\sigma)\,t_1}{\pi D^{\frac{1}{2}}}-1$; wenn wir also $m^{1-2\sigma}\,e^{-\pi m D^{\frac{1}{2}}t^{-1}}$ durch das Integral $\int(1+x)^{1-2\sigma}\,e^{-\pi x D^{\frac{1}{2}}t_1^{-1}}\,dx$ über ein Intervall der Länge 1 mit einem Endpunkt m ersetzen wollen, so bleibt, falls überhaupt $\dfrac{(1-2\sigma)\,t_1}{\pi D^{\frac{1}{2}}}>1$ ist, ein Wert m in der Nähe von $\dfrac{(1-2\sigma)\,t_1}{\pi D^{\frac{1}{2}}}-1$ nicht erfaßbar; außerdem müssen wir $m=1$ abtrennen, wenn das Integral von 0 bis ∞ zur Abschätzung dienen soll. Auf diese Weise erhalten wir

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)^{1-2\sigma}\,e^{-\pi m D^{\frac{1}{2}}t^{-1}}<\int_0^{\infty}(x+1)^{1-2\sigma}\,e^{-x\pi D^{\frac{1}{2}}t_1^{-1}}\,dx+r+1,$$

$$\text{wo}\quad r=\left(\frac{(1-2\sigma)\,t_1}{\pi D^{\frac{1}{2}}}\right)^{1-2\sigma}\cdot e^{\pi D^{\frac{1}{2}}t^{-1}+2\sigma-1},\quad \text{wenn}\quad \frac{(1-2\sigma)\,t_1}{\pi D^{\frac{1}{2}}}\geqq 1$$

$$r=0,\qquad\qquad \text{wenn}\quad \frac{(1-2\sigma)\,t_1}{\pi D^{\frac{1}{2}}}<1.$$

Daher ist im ersten Falle

$$r<(4-2\sigma)^{1-2\sigma}\left[\frac{t_1}{\pi D^{\frac{1}{2}}}\right]^{2\sigma-1}<2^{1-2\sigma}\,(2-\sigma)^{1-2\sigma},$$

und das gilt natürlich auch im zweiten Fall.

Das Integral ist gleich

$$\frac{t_1}{\pi D^{\frac{1}{2}}}\int_0^{\infty}\left(1+\frac{y\,t_1}{\pi D^{\frac{1}{2}}}\right)^{1-2\sigma}e^{-y}\,dy$$

$$<\operatorname{Max}\left(1,\frac{t_1}{\pi D^{\frac{1}{2}}}\right)\cdot\begin{cases}\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-y}\,dy, & \text{wenn } \sigma>\tfrac{1}{2}\\ \displaystyle\int_0^{\infty}\operatorname{Max}\left(1,\frac{t_1}{\pi D^{\frac{1}{2}}}\right)^{1-2\sigma}y^{1-2\sigma}\,e^{-y}\,dy, & \text{wenn } \sigma\leqq\tfrac{1}{2}.\end{cases}$$

Daher folgt durch Einsetzen

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)^{1-2\sigma}\,e^{-\pi m D^{\frac{1}{2}}t_1^{-1}}<\operatorname{Max}\left(1,\frac{t_1}{\pi D^{\frac{1}{2}}}\right)^{\operatorname{Max}(1,\,2-2\sigma)}\left\{1+\frac{1}{\Gamma(2-2\sigma)}+(2-\sigma)^{1-2\sigma}\,2^{1-2\sigma}\right\}$$

$$<c_5\,c_6^{-\sigma}\,(2-\sigma)^{1-2\sigma}\operatorname{Max}\left(1,\frac{t_1}{\pi D^{\frac{1}{2}}}\right)^{\operatorname{Max}(1,\,2(1-\sigma))},$$

Wenn wir dies in die Formel (17) einsetzen und uns auf die Halbebene $\sigma\leqq\frac{1}{2}$ beschränken, so erhalten wir

$$(18)\quad |R_Q(s)|<\frac{|\sin\pi s|}{e^{\pi t_1}}\,c_7\,c_8^{-\sigma}\,(1-\sigma)^{1-4\sigma}\,D^{\frac{1}{2}-\sigma}\,e^{-\pi D^{\frac{1}{2}}t^{-1}}\operatorname{Max}\left(1,\frac{t_1}{\pi D^{\frac{1}{2}}}\right)^{4\operatorname{Max}(1,\,1-\sigma)}.$$

Natürlich kann man $|\sin\pi s|\,e^{-\pi t_1}$ durch 1 ersetzen, wir haben aber den $\sin\pi s$ in Hinblick auf die gleich folgende Übertragung der Abschätzung auf den Bereich $\sigma\geqq\frac{1}{2}$ stehen lassen.

Der Übergang zu $\sigma \geqq \frac{1}{2}$ erfolgt mittels der Funktionalgleichung (Satz 2), der wir die folgende Gestalt geben

$$R_Q(s) = \pi\left(\pi \frac{D}{4}\right)^{1-2s} \Gamma(s)^{-2} \frac{R_Q(1-s)}{\sin \pi(1-s)}.$$

Im Bereich $\sigma \geqq \frac{1}{2}$ gilt nach der Stirlingschen Formel

$$|\Gamma(s)| > c_9 e^{-\sigma} \sigma^{\sigma-\frac{1}{2}} t_1^{\sigma-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\pi t_1}.$$

Daher ist für $\sigma \geqq \frac{1}{2}$

$$|R_Q(s)| < c_{10} c_{11}^{-\sigma} \sigma^{2\sigma-2} D^{\frac{1}{2}-\sigma} e^{-\pi D^{\frac{1}{2}} t_1^{-1}} t_1^{1-2\sigma} \operatorname{Max}\left(1, \frac{t_1}{\pi D^{\frac{1}{2}}}\right)^{4\operatorname{Max}(1,\sigma)}.$$

Satz 3. *In jedem Streifen* $\frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq \sigma_0 < \infty$ *gilt gleichmäßig*

$$R_Q(s) = O\left(D^{\frac{1}{2}-\sigma} e^{-\pi D^{\frac{1}{2}} t_1^{-1}} t_1^{1-2\sigma} \operatorname{Max}\left(1, \frac{t_1}{\pi D^{\frac{1}{2}}}\right)^{4\operatorname{Max}(1,\sigma)}\right) \quad \textit{für} \quad D \to \infty.$$

Die Abschätzungsformel enthält sicher eine zu hohe Potenz von t_1; für $\sigma > 1$ ergibt ja schon Satz 1, daß $|R_Q(s)|$ auf einer Geraden $\sigma = \text{const.}$ beschränkt ist. Es kommt uns aber vor allem auf die Abhängigkeit der Abschätzung von D an, und die Bedeutung von Satz 3 ist die, daß $\zeta_Q(s)$ für großes D und gegenüber D kleine t sehr genau durch $\Phi_D(s)$ dargestellt wird. Hierauf beruht der folgende Abschnitt.

Die Differenz $\zeta_Q(s) - \zeta(2s)$ kann man in ganz ähnlicher Weise auf ihre Abhängigkeit von t untersuchen. Entsprechend der Abschätzung $\zeta(1+it) = O(\log t)$ für große t gilt $\zeta_Q(1+it) - \zeta(2+2it) = O\left(\frac{\log t}{D^{\frac{1}{2}}}\right)$ usw. Darauf soll nicht eingegangen werden.

Jedoch soll nicht unerwähnt bleiben, daß die Limesgleichung $\lim_{D\to\infty} \zeta_Q(s) = \zeta(2s)$, als deren genauer Gültigkeitsbereich nunmehr die Halbebene $\sigma > \frac{1}{2}$ außer $s = 1$ festgestellt ist, und die nach Satz 1 in jeder Halbebene $\sigma \geqq 1 + \varepsilon > 1$ sogar gleichmäßig gilt, auf der Geraden $\sigma = 1$ (und weiter links davon) *nicht* gleichmäßig richtig sein kann. Wir können nämlich zeigen, daß $\zeta_Q(s)$ auf der Geraden $\sigma = 1$ beliebig große Werte annimmt, und da $\zeta(2s)$ auf $\sigma = 1$ beschränkt ist, so muß $\zeta_Q(s) - \zeta(2s)$ für *jedes* D auf $\sigma = 1$ beliebig groß werden. Wir schreiben die Differenz $\zeta_Q(s) - \zeta(2s) = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty}{}' \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Q(n,m)^{-s}$ in der Form

$$\zeta_Q(s) - \zeta(2s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}, \quad a_n \geqq 0.$$

Dann gilt, da $n^{-s} = n^{-\sigma}(\cos(t \log n) + i \sin(t \log n))$ ist,

$$|\zeta_Q(s) - \zeta(2s)| = \sum_{n=1}^{N} a_n n^{-\sigma} \cos(t \log n) - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n n^{-\sigma}.$$

Wir wollen t so wählen, daß die ersten N Zahlen $\cos(t \log n)$ nahe bei 1 liegen. Dazu benutzen wir den folgenden Satz von Dirichlet: $a_1, \ldots, a_N$ seien beliebig reell, $\tau > 0$ und $q > 0$ ganz. Dann gibt es ganze rationale x_n und ein t im Intervall $\tau \leqq t \leqq \tau q^N$ mit

$$|t a_n - x_n| \leqq \frac{1}{q}.$$

Wir setzen $a_n = \frac{\log n}{2\pi}$. Dann wird also

$$|t \log n - 2\pi x_n| \leqq \frac{2\pi}{q},$$

$$\cos(t \log n) \geqq \cos\left(\frac{2\pi}{q}\right).$$

Bei gegebenen σ, τ, q und N gibt es also ein $s = \sigma + it$ mit $\tau \leqq t \leqq \tau q^N$ so, daß

$$|\zeta_Q(s) - \zeta(2s)| \geqq \cos\left(\frac{2\pi}{q}\right) \sum_{n=1}^{N} a_n n^{-\sigma} - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n n^{-\sigma}$$

$$|\zeta_Q(s) - \zeta(2s)| \geqq \cos\left(\frac{2\pi}{q}\right)(\zeta_Q(\sigma) - \zeta(2\sigma)) - 2\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n n^{-\sigma}.$$

Nun ist, falls $1 \leqq \sigma \leqq 2$,

$$\zeta_Q(\sigma) - \zeta(2\sigma) = \pi^{\frac{1}{2}} 4^{\sigma-\frac{1}{2}}\, \zeta(2\sigma-1)\, \frac{\Gamma(\sigma-\frac{1}{2})}{\Gamma(\sigma)}\, D^{\frac{1}{2}-\sigma} + R_Q(\sigma)$$

$$> \pi^{\frac{1}{2}} \frac{2}{2(\sigma-1)} \left(1 - \frac{1}{e}\right) D^{\frac{1}{2}-\sigma} - |R_Q(\sigma)| > \frac{D^{\frac{1}{2}-\sigma}}{\sigma-1} - |R_Q(\sigma)|\,.$$

Denn

$$\zeta(2\sigma-1) > \int_1^{\infty} x^{1-2\sigma}\, dx = \frac{1}{2(\sigma-1)},$$

$$\Gamma(\sigma) \leqq 1,\ \Gamma(\sigma-\tfrac{1}{2}) \geqq \int_0^1 x e^{-x}\, dx + \int_1^{\infty} e^{-x}\, dx = 1 - \frac{1}{e}.$$

Daher ist nach Satz 3 im Intervall $1 \leqq \sigma \leqq 2$ und für hinreichend großes D

$$\zeta_Q(\sigma) - \zeta(2\sigma) > \frac{D^{\frac{1}{2}-\sigma}}{\sigma-1}.$$

Um $2\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n\, n^{-\sigma}$ nach oben abzuschätzen, setzen wir diesen Ausdruck in die Form

$$\sum_{\substack{m \\ Q(n,m)>N}}{}' \sum_{n} Q(n, m)^{-\sigma} = \sum_{\substack{nm \neq 0 \\ Q(n,m)>N}} Q(n, m)^{-\sigma} + 2\sum_{m > \sqrt{\frac{N}{c}}} (cm^2)^{-\sigma}.$$

Nun ist

$$\sum_{m > \sqrt{\frac{N}{c}}} m^{-2\sigma} < \int_{\sqrt{\frac{N}{c}}-1}^{\infty} x^{-2\sigma}\, dx < \left(\left(\frac{N}{c}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right)^{1-2\sigma},$$

$$\sum_{m > \sqrt{\frac{N}{c}}} m^{-2\sigma} < \left(\frac{1}{2}\left(\frac{N}{c}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{1-2\sigma}$$

für $N \geqq 4c$. Also für $N > D$ $(D = 4c - b^2 \geqq 4c - 1)$

$$2\sum_{m > \sqrt{\frac{N}{c}}} (cm^2)^{-\sigma} < 2^{2\sigma} N^{\frac{1}{2}-\sigma} c^{-\frac{1}{2}-\sigma} \leqq 2^{4\sigma+1} N^{\frac{1}{2}-\sigma} D^{-\frac{1}{2}-\sigma}.$$

Weiter ist

$$\sum_{nm \neq 0,\ Q(n,m)>N} Q(n, m)^{-\sigma} < \frac{20}{3} \iint\limits_{\substack{Q(x,y) \geqq N \\ |y| \geqq \frac{1}{2}}} Q(x, y)^{-\sigma}\, dxdy = \frac{20}{3}\, I.$$

Wir transformieren das Integral I wie auf Seite 230 und finden

$$I = (\tfrac{1}{4}D)^{\frac{1}{2}-\sigma} \iint_G |y|^{1-2\sigma} (1 + z^2)^{-\sigma}\, dzdy.$$

G ist das Gebiet $|y| \geqq \frac{1}{2}$, $y^2(1 + z^2) \geqq \dfrac{4N}{D}$. Es ist also

$$I = (\tfrac{1}{4}D)^{\frac{1}{2}-\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} (1+z^2)^{-\sigma} \int_{\mathrm{Max}\left(\frac{1}{2}, 2\left(\frac{N}{D(1+z^2)}\right)^{\frac{1}{2}}\right)}^{\infty} |y|^{1-2\sigma}\, dy dz$$

$$= \frac{(\frac{1}{4}D)^{\frac{1}{2}-\sigma}}{(\sigma-1)} \int_{-\infty}^{+\infty} (1+z^2)^{-\sigma}\, \mathrm{Max}\left\{\frac{1}{2}, 2\left(\frac{N}{D(1+z^2)}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^{2(1-\sigma)} dz$$

$$= 2\frac{N^{1-\sigma} D^{-\frac{1}{2}}}{\sigma-1} \int_{0}^{\sqrt{\frac{16N}{D}-1}} (1+z^2)^{-1}\, dz + \frac{2^{4\sigma-2}}{\sigma-1} D^{\frac{1}{2}-\sigma} \int_{\sqrt{\frac{16N}{D}-1}}^{\infty} (1+z^2)^{-\sigma}\, dz$$

$$\leqq \pi \frac{D^{-\frac{1}{2}} N^{1-\sigma}}{\sigma-1} + \frac{2^{4\sigma-2} D^{\frac{1}{2}-\sigma}}{\sigma-1} \int_{3\sqrt{\frac{D}{N}}}^{\infty} z^{-2\sigma}\, dz$$

$$= \pi \frac{N^{1-\sigma} D^{-\frac{1}{2}}}{\sigma-1} + \left(\frac{4}{3}\right)^{2\sigma-1} \frac{N^{\frac{1}{2}-\sigma}}{\sigma-1}.$$

Also ist für $1 < \sigma \leqq 2$, $N > D$

$$2\sum_{m=N+1}^{\infty} a_n n^{-\sigma} < 600\, \frac{N^{1-\sigma} D^{-\frac{1}{2}}}{\sigma-1}.$$

Daher ist

$$|\zeta_Q(s) - \zeta(2s)| \geqq \frac{D^{-\frac{1}{2}}}{\sigma-1}\left\{\cos\left(\frac{2\pi}{q}\right) - 600\, N^{1-\sigma}\right\}.$$

Wir setzen jetzt $\tau = 1$, $q = 6$, dann ergibt sich, daß

$$|\zeta_Q(s) - \zeta(2s)| \geqq \frac{D^{-\frac{1}{2}}}{\sigma-1}\{\tfrac{1}{2} - 600\, N^{1-\sigma}\}$$

sein muß für ein $s = \sigma + it$ mit $1 \leqq t \leqq 6^N$. Bedeutet nun N die auf $2500^{\frac{1}{\sigma-1}}$ folgende ganze Zahl, so wird

$$|\zeta_Q(s) - \zeta(2s)| \geqq \frac{D^{-\frac{1}{2}}}{4(\sigma-1)}.$$

Für hinreichend kleines σ ist $\frac{N}{2} < 2500^{\frac{1}{\sigma-1}}$, also $\frac{1}{\sigma-1} \geqq \frac{\log \frac{N}{2}}{\log 2500}$,

$$|\zeta_Q(s) - \zeta(2s)| \geqq D^{-\frac{1}{2}} \frac{\log N - \log 2}{4 \log 2500}$$

$$|\zeta_Q(s) - \zeta(2s)| \geqq \frac{D^{-\frac{1}{2}}}{32} (\log\log t - 2).$$

t muß beliebig große Werte annehmen. Denn wären alle so bestimmten t sämtlich $\leqq t_0$, so wäre

$$|\zeta_Q(s) - \zeta(2s)| \geqq \frac{D^{-\frac{1}{2}}}{4(\sigma-1)}$$

für passendes $s = \sigma + it$, $1 \leqq t \leqq t_0$, was der Stetigkeit von $\zeta_Q(s) - \zeta(2s)$ in dem Gebiete $1 \leqq \sigma$, $1 \leqq t \leqq t_0$ widerspricht. Daher gibt es beliebig große t, zu denen sich ein

σ in $1 < \sigma \leqq 2$ so finden läßt, daß $|\zeta_Q(\sigma + it) - \zeta(2\sigma + 2it)| > \frac{D^{-\frac{1}{2}} \log\log t}{40}$ gilt. Nach einem Satze von Phragmén und Lindelöf wird also auch

$$|\zeta_Q(1 + it) - \zeta(2 + 2it)| > \frac{D^{-\frac{1}{2}} \log\log t}{40}.$$

§ 3. Die Nullstellen von $\zeta_Q(s)$.

1. Die Tatsache, daß $\zeta_Q(s)$ mit wachsendem D in jedem von $s = 1$ verschiedenen Punkte der Halbebene $\sigma > \frac{1}{2}$ gegen $\zeta(2s)$ konvergiert, läßt vermuten, daß für den Abstand der nichtreellen Nullstellen der Funktion $\zeta_Q(s)$ von der Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$ eine obere Schranke aufgestellt werden kann, die mit wachsendem D gegen Null konvergiert. Es gelingt jedoch, sogar zu beweisen, daß die Nullstellen von $\zeta_Q(s)$ mit gegenüber D kleinen Ordinaten auf der Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$ gelegen sind.

Bevor wir dies ausführen, wollen wir uns über die Lage der reellen Nullstellen von $\zeta_Q(s)$ Klarheit verschaffen. Aus der Definition von $\zeta_Q(s)$ folgt unmittelbar $\zeta_Q(s) > 0$, falls $s > 1$. $s = 1$ ist ein Pol erster Ordnung. Aus der Funktionalgleichung folgt dann, daß $\zeta_Q(0) < 0$; und weiter, daß $\zeta_Q(s)$ bei $s = -1, -2, -3, \ldots$ Nullstellen erster Ordnung hat. Aus $\lim_{D\to\infty} \zeta_Q(s) = \zeta(2s)$ für $s > \frac{1}{2}$ folgt, daß $\zeta_Q(s)$ für festes s zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 schließlich positiv wird. Andererseits ist $\zeta_Q(s)$ in unmittelbarer Nähe links von $s = 1$ negativ, weil das Residuum von $\zeta_Q(s)$ bei $s = 1$ positiv sein muß, denn $\zeta_Q(s) > 0$ für $s > 1$. Es ergibt sich also, daß $\zeta_Q(s)$ für hinreichend großes D mindestens eine reelle Nullstelle $1 - \varepsilon$, $\frac{1}{2} < \varepsilon < 1$, hat. Ihr entspricht nach der Funktionalgleichung eine Nullstelle ε.

Wir berechnen zunächst $\zeta_Q(\frac{1}{2})$, um den Verlauf von $\zeta_Q(s)$ zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 etwas genauer übersehen zu können. $\Phi_D(s)$ kann in die Form

$$\Phi_D(s) = \zeta(2s) + \pi^{\frac{1}{2}}\left(\frac{D}{4}\right)^{\frac{1}{2}-s} \frac{\zeta(2s-1)\,\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)} = \zeta(2s) + \left(\frac{D}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{2}-s} \zeta(2-2s)\,\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(s)}$$

gesetzt werden. $\zeta(2s-1)$ wurde mit Hilfe der Riemannschen Funktionalgleichung umgeformt. Wir entwickeln die Funktionen $\zeta(2s)$, $\left(\frac{D}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{2}-s}$, $\zeta(2-2s)$ und $\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(s)}$ nach Potenzen von $s - \frac{1}{2}$ bis zum jeweils zweiten Glied:

$$\begin{aligned}
\zeta(2s) &= \tfrac{1}{2}(s-\tfrac{1}{2})^{-1} + C + \cdots \\
\left(\frac{D}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{2}-s} &= 1 - \left(\log\frac{D}{4\pi^2}\right)(s-\tfrac{1}{2}) + \cdots \\
\zeta(2-2s) &= -\tfrac{1}{2}(s-\tfrac{1}{2})^{-1} + C + \cdots \\
\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(s)} &= 1 - 2\frac{\Gamma'}{\Gamma}(\tfrac{1}{2})(s-\tfrac{1}{2}) + \cdots,
\end{aligned}$$

C ist die Eulersche Konstante.

Setzt man dies in den Ausdruck für $\Phi_D(s)$ ein, so erhält man

$$\Phi_D(\tfrac{1}{2}) = 2C + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(\tfrac{1}{2}) + \log\frac{D}{4\pi^2},$$

und da

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(\tfrac{1}{2}) = \log 2 - C - 1$$

ist,

$$\Phi_D\left(\tfrac{1}{2}\right) = C - 1 + \tfrac{1}{2}\log\frac{D}{\pi^2}. \tag{19}$$

$\zeta_Q(\frac{1}{2}) = \Phi_Q(\frac{1}{2}) + R_Q(\frac{1}{2})$ ist demnach für hinreichend großes D positiv, denn $R_Q(\frac{1}{2})$ ist nach Satz 3 für große D sehr klein. Die Annäherung von $\zeta_Q(s)$ an die bei $s = \frac{1}{2}$ polare Funktion $\zeta(2s)$ macht sich an der Stelle $s = \frac{1}{2}$ selbst dadurch bemerkbar, daß $\zeta_Q(\frac{1}{2})$ wie $\log D$ anwächst.

Im Intervall $\frac{1}{2} < s < 1$ schmiegt sich dann $\zeta_Q(s)$ an $\zeta(2s)$ an. Wir wollen hier das Ergebnis vorwegnehmen, daß $\zeta_Q(s)$ für hinreichend großes D im Intervall $\frac{1}{2} < s < \frac{3}{4}$ keine Nullstelle hat, also positiv ist.

Zur Untersuchung der Kreisscheibe $|s-1| < \frac{1}{4}$ auf Nullstellen drücken wir die Anzahl der Nullstellen von $\zeta_Q(s)$ in diesem Kreise durch das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|s-1|=\frac{1}{4}} \frac{\zeta_Q'}{\zeta_Q}(s)\,ds = n_Q$$

aus. Da auf der Kreislinie $|s-1| = \frac{1}{4}$ gleichmäßig $\lim_{D\to\infty} \zeta_Q(s) = \zeta(2s)$ gilt, so gilt

$$\lim_{D\to\infty} n_Q = \frac{1}{2\pi i}\int_{|s-1|=\frac{1}{4}} \frac{\zeta'}{\zeta}(2s)\,ds = 0,$$

woraus sich ergibt, daß $\zeta_Q(s)$ für hinreichend großes D genau eine Nullstelle in der Kreisfläche $|s-1| \leqq \frac{1}{4}$ haben muß, denn $s = 1$ ist ein Pol erster Ordnung. Diese Nullstelle muß die oben mit $1-\varepsilon$ bezeichnete sein, sie ist reell und aus der zu Anfang gemachten Überlegung schließt man leicht, daß ε mit wachsendem D gegen Null konvergiert. Wir wollen die Größenordnung von ε genauer bestimmen. Zu diesem Zwecke entwickeln wir nach Potenzen von $s-1$

$$\begin{aligned}
\zeta(s-1) &= \tfrac{1}{2}(s-1)^{-1} + C + \cdots \\
\Gamma(s-\tfrac{1}{2}) &= \Gamma(\tfrac{1}{2}) + \Gamma'(\tfrac{1}{2})\,(s-1) + \cdots \\
\frac{1}{\Gamma(s)} &= 1 - \Gamma'(1)\,(s-1) + \cdots \\
\left(\frac{D}{4}\right)^{\frac{1}{2}-s} &= \left(\frac{D}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 - \left(\log\frac{D}{4}\right)(s-1) + \cdots\right).
\end{aligned}$$

Wir setzen nun für s die Nullstelle $1-\varepsilon$ ein und erhalten auf diese Weise

$$\frac{\pi^2}{6} - \zeta'(2)\varepsilon + O(\varepsilon^2) + \frac{2\pi}{D^{\frac{1}{2}}}\left\{-\tfrac{1}{2}\varepsilon^{-1} + C + \tfrac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}(\tfrac{1}{2}) - \Gamma'(1) - \log\frac{D}{4} + O(\varepsilon)\right\} + O(\varepsilon^{-\pi D^{\frac{1}{2}}}) = 0.$$

Berücksichtigen wir nun noch die oben angebene Formel für $\frac{\Gamma'}{\Gamma}(\frac{1}{2})$ und $\Gamma'(1) = -C$, so vereinfacht sich dies zu

$$\frac{\pi^2}{6} - \zeta'(2)\,\varepsilon + O(\varepsilon^2) - \frac{\pi}{D^{\frac{1}{2}}\varepsilon} - \frac{\pi}{\sqrt{D}}\{\log D + 1 - 6\log 2\} + O(\varepsilon D^{-\frac{1}{2}}) = 0.$$

Beachten wir $\varepsilon = O(1)$, so folgt hieraus zunächst

$$\frac{\pi}{\varepsilon D^{\frac{1}{2}}} = \frac{\pi^2}{6} + O(1),$$

$$\varepsilon = \frac{6}{\pi D^{\frac{1}{2}}}(1 + o(1)).$$

2. Wir kommen zu den komplexen Nullstellen von $\zeta_Q(s)$.

Satz 4. *Es gibt zwei positive Zahlen c_1 und c_2 derart, daß für $D > c_1$ alle von ε und $1-\varepsilon$ verschiedenen Nullstellen von $\Phi_Q(s)$ im Gebiet $-1 \leqq \sigma \leqq 2$, $|t| < D^{c_2}$ den Realteil $\frac{1}{2}$ haben.*

Beweis. Wir setzen $\Phi_Q(s)$ in die Form

$$\Phi_Q(s) = \zeta(2s)\,(1 + f(s)),$$

also

$$f(s) = \pi^{\frac{1}{2}} \left(\frac{D}{4}\right)^{\frac{1}{2}-s} \frac{\Gamma(s-\frac{1}{2})\,\zeta(2s-1)}{\Gamma(s)\,\zeta(2s)},$$

und zeigen, daß $f(s)$ im Bereich $\sigma > \frac{1}{2}$, $|t| < D^{c_2}$, $|s-1| \geqq \frac{1}{4}$ dem Betrage nach kleiner als 1 ist.

Zuerst betrachten wir den durch $\sigma > \frac{1}{2} + c_3 \frac{\log\log D^{c_2}}{\log D^{c_2}}$ abgegrenzten Teilbereich. Nach der Stirlingschen Formel ist für $|t| \geqq 2$, $-1 \leqq \sigma \leqq 2$

$$|\Gamma(s-\tfrac{1}{2})| < c_4\, e^{-\frac{1}{2}\pi|t|}\,|t|^{\sigma-1}$$
$$|\Gamma(s)| > c_5\, e^{-\frac{1}{2}\pi|t|}\,|t|^{\sigma-\frac{1}{2}},$$
$$\left|\frac{\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)}\right| < \frac{c_4}{c_5}\,|t|^{-\frac{1}{2}}.$$

Ferner gilt (Titchmarsch 1.21, theorem 3, S. 9)

$$\left|\frac{1}{\zeta(2s)}\right| \leqq \frac{\zeta(2\sigma)}{\zeta(4\sigma)} < \frac{\zeta\left(1 + 2\,c_3 \frac{\log\log D^{c_2}}{\log D^{c_2}}\right)}{\zeta(2)}$$
$$< \frac{1}{\zeta(2)}\left(1 + \frac{\log D^{c_2}}{2\,c_3 \log\log D^{c_2}}\right) < 2\log D^{c_2},$$

und, falls $|t| \geqq 2$ ist,

$$|\zeta(2s-1)| < c_6\,|t|^{1-\sigma}\log|t|.$$

(Titchmarsh 1.53, theorem 11, S. 20.) Demnach ist

$$|f(s)| < 2 \cdot 4^{\frac{3}{2}} \sqrt{\pi}\, \frac{c_4 c_6}{c_5}\,|t|^{\frac{1}{2}-\sigma}\log|t|\; D^{\frac{1}{2}-\sigma}\log D^{c_2},$$

$$|f(s)| < 16\sqrt{\pi}\,\frac{c_4 c_6}{c_5}\,D^{(c_2+1)(\frac{1}{2}-\sigma)}\,(\log D^{c_2})^2 \leqq 16\sqrt{\pi}\,\frac{c_4 c_6}{c_5}\,D^{-(c_2+1)c_3\frac{\log\log D^{c_2}}{\log D^{c_2}}}\,(\log D^{c_2})^2,$$

$$|f(s)| < 16\sqrt{\pi}\,\frac{c_4 c_6}{c_5}\,e^{-\log\log D^{c_2}[c_3(1+c_2^{-1})-2]}. \tag{20}$$

Dieser Ausdruck ist kleiner als $\frac{1}{2}$, falls nach Wahl von c_3 die Konstante c_2 gemäß

$$c_3\,(1 + c_2^{-1}) > 2$$

und c_1 gemäß

$$e^{\log\log c_1^{c_2}(c_3(1+c_2^{-1})-2)} \geqq \frac{16\pi^{\frac{1}{2}}\,c_4 c_6}{c_5}$$

gewählt wird.

Für $|t| \leqq 2$ ist

$$|f(s)| \leqq \pi^{\frac{1}{2}}\left(\frac{D}{4}\right)^{\frac{1}{2}-\sigma} \operatorname*{Max}_{\substack{\frac{1}{2}\leqq\sigma\leqq 2,\,|t|\leqq 2,\\ |s-1|\geqq\frac{1}{4}}} \left|\frac{\Gamma(s-\frac{1}{2})\,\zeta(2s-1)}{\Gamma(s)\,\zeta(2s)}\right|,$$

$$|f(s)| < 8\,\pi^{\frac{1}{2}} \operatorname*{Max}_{\substack{\frac{1}{2}\leqq\sigma\leqq 2,\,|t|\leqq 2,\\ |s-1|\geqq\frac{1}{4}}} \left|\frac{\Gamma(s-\frac{1}{2})\,\zeta(2s-1)}{\Gamma(s)\,\zeta(2s)}\right| e^{-\frac{c_3}{c_2}\log\log D^{c_2}} < \frac{1}{2}, \tag{21}$$

falls c_2 und c_3 passend gewählt werden.

Im Bereich $|t| \leqq D^{c_2}$, $\frac{1}{2} < \sigma < \frac{1}{2} + c_3 \frac{\log\log D^{c_2}}{\log D^{c_2}}$ stellen wir $|f(s)|$ folgendermaßen dar:

$$|f(s)| = |f(\sigma_0 + it)| = |f(\tfrac{1}{2} + it)| + \int_{\frac{1}{2}}^{\sigma_0} \frac{d}{d\sigma} |f(\sigma + it)|\, d\sigma.$$

$$f(s) = \left(\frac{D}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{2}-s} \frac{\Gamma(1-s)\,\zeta(2-2s)}{\Gamma(s)\,\zeta(2s)}$$

hat für $\sigma = \frac{1}{2}$ den Betrag 1:

$$|f(\tfrac{1}{2} + it)| = \left(\frac{D}{4\pi^2}\right)^{-it} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - it)\,\zeta(1-it)}{\Gamma(\frac{1}{2} + it)\,\zeta(1+it)}.$$

Es ist also

$$|f(\sigma_0 + it)| = 1 + \int_{\frac{1}{2}}^{\sigma_0} \frac{d}{d\sigma} |f(\sigma + it)|\, d\sigma.$$

Zum Nachweis von

$$|f(\sigma_0 + it)| < 1 \qquad \text{für } \sigma_0 > \tfrac{1}{2}$$

genügt es daher, wenn

$$\frac{d}{d\sigma} |f(\sigma + it)| < 0 \qquad \text{für } \tfrac{1}{2} \leqq \sigma \leqq \sigma_0$$

nachgewiesen wird.

Nun ist

$$\frac{d}{d\sigma} |f(s)| = |f(s)| \frac{d}{d\sigma} \log |f(s)| = |f(s)| \frac{d}{d\sigma} \mathbf{R} \log f(s)$$

$$= |f(s)|\, \mathbf{R} \frac{d}{d\sigma} \log f(s) = |f(s)|\, \mathbf{R} \frac{f'(s)}{f(s)},$$

$$\frac{d}{d\sigma} |f(s)| = -|f(s)| \left\{ \mathbf{R} \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) + \mathbf{R} \frac{\Gamma'}{\Gamma}(1-s) + 2\,\mathbf{R} \frac{\zeta'}{\zeta}(2s) + 2\,\mathbf{R} \frac{\zeta'}{\zeta}(2-2s) + \log \frac{D}{4\pi^2} \right\}.$$

Für $|t| \leqq 10$ ist der Ausdruck in der Klammer positiv, sogar größer als $\frac{1}{2} \log D$, wenn nur c_1 hinreichend groß gewählt wird. Für $|t| \geqq 10$ gilt

$$(22) \qquad \begin{cases} 1. & \left|\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s)\right| + \left|\frac{\Gamma'}{\Gamma}(1-s)\right| < c_7 \log|t| \leqq c_2\, c_7 \log D \\ 2. & \left|\frac{\zeta'}{\zeta}(2s)\right| \leqq c_8 \log|t| \leqq c_2\, c_8 \log D \\ \text{und} & \\ & \left|\frac{\zeta'}{\zeta}(2-2s)\right| \leqq c_8 \log|t| \leqq c_2\, c_8 \log D, \end{cases}$$

falls c_3 passend gewählt wird. Dies folgt aus einem bekannten Satze von J. E. Littlewood [2]):

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = O\left(\frac{\log t}{\log\log t}\right) \quad \text{für} \quad \sigma > 1 - c_3 \frac{\log\log t}{\log t}.$$

---

[2]) J. E. Littlewood, Researches in the theory of the Riemann ζ-function, Proc. London Math. Soc. (2) **20** (1922), records XXII—XXVIII; siehe auch Titchmarsh 1.64 theorem 14, S. 24.

Seine Anwendbarkeit in unserem Falle ergibt sich aus

$$\tfrac{1}{2} \leqq \sigma \leqq 2, \quad 1 \geqq 2-2\sigma \geqq 1-2c_3 \frac{\log\log D^{c_2}}{\log D^{c_2}} \geqq 1-2c_3 \frac{\log\log|t|}{\log|t|}.$$

Der Ausdruck für

$$-\frac{1}{|f(s)|}\frac{d}{d\sigma}|f(s)|$$

wird also bei passenden c_1 und c_2 mindestens $\frac{1}{2}\log D$. Mithin ist

$$\frac{d}{d\sigma}|f(s)| < -\tfrac{1}{2}|f(s)|\log D \quad \text{für} \quad \tfrac{1}{2} \leqq \sigma \leqq \frac{1}{2} + c_3 \frac{\log\log D^{c_2}}{\log D^{c_2}}.$$

Hiermit ist Satz 4 bewiesen, denn es ist gezeigt, daß der Betrag von $f(s)$, der auf der Geraden $\frac{1}{2}$ gleich 1 ist, bis zum Punkte $\sigma = \frac{1}{2} + c_3 \frac{\log\log D^{c_2}}{\log D^{c_2}}$ hin abnimmt, also kleiner als 1 ist. Daß er rechts von diesem Punkte stets kleiner als 1 ist, ist zu Anfang des Beweises gezeigt worden.

3. Wir kommen jetzt zu der Übertragung des Satzes 4 von $\Phi_D(s)$ auf $\zeta_Q(s)$. Das Hilfsmittel ist der *Satz von Rouché*:

Sind die Funktionen $g(z)$ und $h(z)$ in dem Gebiet G bis auf Pole regulär und ist auf dem Rand von G durchweg $|h(z)| < |g(z)|$, so hat $g(z)+h(z)$ in G ebensoviele Nullstellen wie $g(z)$. Die Nullstellen werden dabei in ihrer Vielfachheit gezählt, während die Pole mit der negativen Vielfachheit in Anschlag gebracht werden müssen.

Eine obere Abschätzung für die Differenz $\zeta_Q(s) - \Phi_D(s) = R_Q(s)$ gibt Satz 3. Um den Rouchéschen Satz anwenden zu können, müssen wir noch eine untere Abschätzung für den Betrag von $\Phi_D(s)$ haben.

Satz 5. *$T > 10$ sei eine reelle Zahl mit*

$$f(\tfrac{1}{2} + iT) = 1.$$

Dann gilt, falls $t = T$, $\sigma \geqq \frac{1}{2}$ ist,

$$|1 + f(s)| > c_9 \left(\frac{\log\log T}{\log T}\right)^2,$$

unter der Voraussetzung $D > c_1$, $T < D^{c_2}$.

Beweis. 1. Für die Strecke $\sigma \geqq \frac{1}{2} + c_3 \frac{\log\log T}{\log T}$ folgt aus (20), (21) sogar $|1 + f(s)| \geqq \frac{1}{2}$.

2. Für die Strecke $\frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq \frac{1}{2} + c_3 \frac{\log\log T}{\log T}$ folgt aus (22)

$$\frac{d}{d\sigma}|f(s)| < -c_{10}\log D \cdot D^{\frac{1}{2}-\sigma}\frac{\zeta(2-2s)\,\Gamma(1-s)}{\zeta(2s)\,\Gamma(s)}.$$

Anwendung der Stirlingschen Formel auf $\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(s)}$, des Satzes

$$\text{(23a)} \qquad \zeta(s) = O\left(\frac{\log t}{\log\log t}\right), \quad \sigma > 1 - c_3\frac{\log\log t}{\log t}$$

auf $\zeta(2s)$ und des Satzes

$$\text{(23b)} \qquad \frac{1}{\zeta(s)} = O\left(\frac{\log t}{\log\log t}\right), \quad \sigma > 1 - c_3\frac{\log\log t}{\log t}$$

auf $\zeta(2-2s)$ ergibt [3])

[3]) Die Eigenschaften von $\zeta(s)$, die hier benutzt wurden, sind von Littlewood gefunden worden, a. a. O.[2]); vgl. Titchmarsh 1.62, theorem 12, S. 22 und 1.65, theorem 14, S. 24.

$$\frac{d}{d\sigma}|f(s)| < -c_{11} D^{\frac{1}{2}-\sigma} \log D \; T^{1-2\sigma} \left(\frac{\log\log T}{\log T}\right)^2.$$

Integration der zuletzt gefundenen Ungleichung ergibt

$$1 - |f(s)| = \int_{\sigma}^{\frac{1}{2}} \frac{d}{d\sigma}|f(s)|\, d\sigma > c_{11} \log D \left(\frac{\log\log T}{\log T}\right)^2 \int_{\frac{1}{2}}^{\sigma} (DT^2)^{\frac{1}{2}-\sigma}\, d\sigma.$$

Daher ist bei gegebenem c_{12} und $\sigma > \frac{1}{2} + \frac{c_{12}}{\log D}$

$$|1 + f(s)| \geqq c_9 \left(\frac{\log\log T}{\log T}\right)^2.$$

3. Bei der übrigbleibenden Strecke $\frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq \frac{1}{2} + \frac{c_{12}}{\log D}$ müssen wir berücksichtigen, daß $1 + f(\frac{1}{2} + iT) = 2$ ist. Wir untersuchen, wie sich das Argument von $f(s)$ ändert, wenn sich s nach rechts bewegt. Es ist nach (22)

$$\begin{aligned}
\left|\frac{d}{d\sigma} \arg f(s)\right| &= \left|\mathrm{I}\frac{d}{d\sigma} \log f(s)\right| \leqq \left|\frac{d}{d\sigma} \log f(s)\right| \\
&= \left|\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s - \tfrac{1}{2}) + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) + 2\frac{\zeta'}{\zeta}(2s) + 2\frac{\zeta'}{\zeta}(2 - 2s) + \log\frac{D}{4\pi^2}\right| \\
&\leqq \log D + c_7 \log T + 4c_8 \log T \\
&\leqq (1 + c_2 c_3 + 4c_2 c_8) \log D.
\end{aligned}$$

$$|\arg f(\sigma + iT) - \arg f(\tfrac{1}{2} + iT)| = \left|\int_{\frac{1}{2}}^{\sigma} \frac{d}{d\sigma} \arg f(\sigma + iT)\, d\sigma\right| \leqq (1 + c_2 c_7 + 4c_2 c_8)(\sigma - \tfrac{1}{2}) \log D.$$

Wird jetzt

$$c_{12} = \frac{\pi}{2(1 + c_2 c_7 + 4c_2 c_8)}$$

gesetzt, so gilt, falls $\frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq \frac{1}{2} + \frac{c_{12}}{\log D}$,

$$|\arg f(\sigma + iT) - \arg f(\tfrac{1}{2} + iT)| \leqq \tfrac{1}{2}\pi,$$

also, da

$$\arg f(\tfrac{1}{2} + iT) = 2\pi k, \quad k \text{ ganz},$$
$$|1 + f(s)| \geqq 1.$$

Satz 6. *Es sei wieder $D > c_1$. Dann haben die beiden Funktionen $\zeta_Q(s)$ und $\Phi_D(s)$ im Gebiet $|t| \leqq T$, $-1 \leqq \sigma \leqq 2$ gleich viel Nullstellen. Dabei ist $\frac{1}{2}D^{c_3} \leqq T < D^{c_3}$.*

Beweis. T sei die kleinste Zahl, die nicht kleiner als $\frac{1}{2}D^{c_3}$ ist, und für die $f(\frac{1}{2} + iT) = 1$ gilt. T existiert und ist sogar kleiner als D^{c_3}, wenn die Konstanten c_1 und c_2 richtig gewählt werden. Um das einzusehen, setzen wir für $\sigma = \frac{1}{2}$ die Funktion $f(s)$ in die Form

$$f(\tfrac{1}{2} + iT) = e^{i\varphi(t)}.$$

Es ist

$$\varphi(t) = -t \log\left(\frac{D}{4\pi^2}\right) + \log\frac{\Gamma(\frac{1}{2} - it)}{\Gamma(\frac{1}{2} + it)} + \log\frac{\zeta(1 - 2it)}{\zeta(1 + 2it)},$$

$$\varphi'(t) = \frac{\Gamma'}{\Gamma}(\tfrac{1}{2} - it) + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(\tfrac{1}{2} + it) + 2\frac{\zeta'}{\zeta}(1 + 2it) + 2\frac{\zeta'}{\zeta}(1 - 2it) - \log\left(\frac{D}{4\pi^2}\right).$$

Also, wie beim Beweis von Satz 4 gezeigt,

$$\varphi'(t) < -\tfrac{1}{2}\log D.$$

Hieraus folgt, daß jede Strecke der Länge $-\dfrac{2\pi}{\log D}$, die dem Intervall $-D^{c_2} \leqq t \leqq D^{c_2}$ ganz angehört, mindestens ein T mit $f(\frac{1}{2}+iT)=1$ enthält. Sicherlich ist aber

$$\frac{2\pi}{\log D} < \tfrac{1}{2}D^{c_2},$$

wenn c_1 und c_2 richtig gewählt werden.

Auf unser T können wir also den vorhergehenden Satz anwenden. C sei das Rechteck mit den Ecken $2 \pm iT$, $-1 \pm iT$; C_1 die rechts von $\sigma < \frac{1}{2}$ gelegene Hälfte davon. Auf C_1 gilt nach (23) und Satz 5

$$|\Phi_D(s)| = |\zeta(2s)|\,|1+f(s)| \geqq c_9\,\zeta(2s)\left(\frac{\log\log T}{\log T}\right)^2,$$

$$|\Phi_D(s)| \geqq c_{13}\left(\frac{\log\log T}{\log T}\right)^3. \tag{24}$$

Um $|\Phi_D(s)|$ auf der linken Hälfte von C abzuschätzen, wenden wir die Funktionalgleichung für $\Phi_D(s)$ an. Aus ihr folgt

$$|\Phi_D(s)| = |\Phi_D(1-s)|\left|\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(s)}\right|\left(\frac{D}{\pi^2}\right)^{\frac{1}{2}-\sigma}.$$

Es ist (Stirlingsche Formel)

$$\left|\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(s)}\right| \geqq c_{14}\,\mathrm{Max}\,(1,|t|)^{1-2\sigma} \geqq c_{14},$$

falls $\sigma \leqq \frac{1}{2}$. Ferner ist $\left(\dfrac{D}{\pi^2}\right)^{\frac{1}{2}-\sigma} \geqq 1$, falls $\sigma \leqq \frac{1}{2}$. Demnach gilt (24) (mit passenden c_{13}) auf ganz C. Wegen $T \leqq D^{c_2}$ folgt nun

$$|\Phi_D(s)| \geqq \frac{c_{15}}{\log^3 D}.$$

Nach Satz 3 ist auf C ferner

$$|R_Q(s)| < c_{16}\,D^{\frac{3}{2}}\,e^{-\pi D^{\frac{1}{2}-c_2}}\,D^{3c_2}.$$

Aus den beiden letzten Ungleichungen folgt schließlich

$$|\Phi_D(s)| > |R_Q(s)| \quad \text{auf } C,$$

falls c_2 passend gewählt wird. Die Anwendung des Satzes von Rouché auf das Rechteck C und die Funktionen $g(s)=\Phi_D(s)$, $h(s)=R_Q(s)$ ergibt die Behauptung von Satz 6.

Satz 7. *Die in* $-1 \leqq \sigma \leqq 2$, $|t| \leqq T$ *gelegenen Nullstellen* ϱ^* *von* $\Phi_D(s)$ *lassen sich den Nullstellen* ϱ *von* $\zeta_Q(s)$ *im gleichen Gebiet umkehrbar eindeutig derart zuordnen, daß zusammengehörige* ϱ, ϱ^* *um nicht mehr als* $e^{-\pi D^{\frac{1}{4}}}$ *voneinander entfernt sind. Die* ϱ *und* ϱ^* *sind einfache Nullstellen.*

Beweis. Wir wenden den Satz von Rouché auf kleine Kreise um die ϱ^* an. ϱ^* sei eine feste Nullstelle von $\Phi_D(s)$ in dem angegebenen Gebiet, zunächst eine, die auf der Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$ liegt. Die Entwicklung von $\Phi_D(s)$ nach Potenzen von $s-\varrho^*$ sei

$$\Phi_D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n (s-\varrho^*)^n.$$

Es gilt

$$2\pi i g_n = \int_{C_0} \Phi_D(s)\,(s-\varrho^*)^{n-1}\,ds, \tag{25}$$

wo C_0 das Rechteck mit den Ecken $\frac{1}{4} \pm i(T+1)$, $\frac{3}{4} \pm i(T+1)$ ist; T bedeutet die Zahl im Beweis von Satz 6. Aus (25) folgt

$$2\pi\,|g_n| \leqq (4T+6)\,4^{n-1} \operatorname*{Max}_{s \text{ auf } C_0} |\Phi_D(s)|.$$

Denn der Umfang von C_0 ist $4T+6$ und die Entfernung des Punktes ϱ^* von C_0 ist $\frac{1}{4}$.

Nach dem Beweis von Satz 4 ist auf der rechten Hälfte von C_0 (sogar für alle s mit $\frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq \frac{3}{4}$, $|t| \leqq D^{c_2}$), $|f(s)| \leqq 1$, also nach (23)

$$|\Phi_D(s)| \leqq 2\,|\zeta(2s)| < c_{17} \frac{\log T}{\log\log T}.$$

Aus

$$|\Phi_D(s)| = |\Phi_D(1-s)| \left|\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(s)}\right| \left(\frac{D}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{2}-\sigma}$$

folgt dann (Stirlingsche Formel) für die s der linken Hälfte von C_0

$$|\Phi_D(s)| \leqq c_{18}\, D^{\frac{1}{4}}\, T^{\frac{1}{2}}\, |\Phi_D(1-s)|\,,$$

so daß

$$\operatorname*{Max}_{s \text{ auf } C_0} |\Phi_D(s)| < c_{19}\, T^{\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{4}}, \quad |g_n| \leqq c_{20}^n\, T^2 D^{\frac{1}{4}}.$$

Für den ersten Koeffizienten g_1 hingegen stellen wir eine untere Abschätzung auf:

$$g_1 = \Phi_D'(\varrho^*) = f'(\varrho^*)\,\zeta(2\varrho^*) + 2(1+f(\varrho^*))\,\zeta'(2\varrho^*) - \zeta(2\varrho^*)\frac{f'(\varrho^*)}{f(\varrho^*)}$$

$$= \zeta(2\varrho^*)\left\{\frac{\Gamma'}{\Gamma}(\varrho^*) + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(1-\varrho^*) + 2\frac{\zeta'}{\zeta}(2-2\varrho^*) + 2\frac{\zeta'}{\zeta}(2\varrho^*) + \log\frac{D}{4\pi^2}\right\}.$$

Nach dem Beweis von Satz 4 ist der Betrag der Klammer größer als $\frac{1}{2}\log D$. Ferner ist (Titchmarsh 1.43, theorem 9, S. 17)

$$\left|\frac{1}{\zeta(2\varrho^*)}\right| \leqq 2c_{21}\log D,$$

daher

$$|g_1| \geqq c_{21}.$$

Für die Punkte s der Kreisscheibe $|s-\varrho^*| \leqq e^{-\pi D^{\frac{1}{4}}}$ gilt demnach

$$|\Phi_D(s)| \geqq |g_1\,(s-\varrho^*)| - \sum_{n=2}^{\infty} |g_n (s-\varrho^*)^n|$$

$$\geqq |s-\varrho^*| \left\{c_{21} - T^2 D^{\frac{1}{4}}\, c_{20} \sum_{n=2}^{\infty} (4\,c_{20}\, e^{-\pi D^{\frac{1}{4}}})^{n-1}\right\}$$

Also ist

$$|\Phi_D(s)| \geqq c_{22}\, e^{-\pi D^{\frac{1}{4}}}$$

für

$$|s-\varrho^*| = e^{-\pi D^{\frac{1}{4}}}.$$

Andererseits ist nach Satz 3 $|R_Q(s)| < c_{22}\, e^{-\pi D^{\frac{1}{4}}}$, wenn die Konstanten passend gewählt werden. ϱ^* ist wegen $g_1 \neq 0$ eine einfache Nullstelle von $\Phi_D(s)$. Nach dem Satze von Rouché schließt also die Kreislinie $|s-\varrho^*| = e^{-\pi D^{\frac{1}{4}}}$ genau eine einfache Nullstelle von $\zeta_Q(s)$ ein. Nach Satz 6 werden alle Nullstellen von $\zeta_Q(s)$ auf diese Weise auch erschöpft.

Satz. 8. *Alle nichtreellen Nullstellen von $\zeta_Q(s)$, deren Ordinaten absolut kleiner als T sind, haben den Realteil $\frac{1}{2}$.*

Beweis. Die Kreise mit dem Radius $e^{-\pi D^{\frac{1}{2}}}$ um die Nullstellen ϱ^* von $\Phi_D(s)$, in denen nach dem vorigen Satz je eine Nullstelle ϱ von $\zeta_Q(s)$ liegt, überdecken sich bei passender Konstantenwahl nicht. Um dies zu zeigen, beachten wir die im Intervall $-D^{c_2} \leqq t \leqq D^{c_2}$ gültige Ungleichung

$$\varphi'(t) \leqq c_{23} \log D,$$

aus der folgt, daß die betrachteten Nullstellen ϱ^* jeweils um mehr als $2\pi\,(c_{23} \log D)^{-1}$ voneinander entfernt sind.

Wenn eine der untersuchten Nullstellen ϱ von $\zeta_Q(s)$ nicht den Realteil $\frac{1}{2}$ hätte, so müßte nach Satz 7, und weil die ϱ^* den Realteil $\frac{1}{2}$ haben, eine unserer Kreisscheiben zwei von den Nullstellen ϱ enthalten, nämlich die beiden symmetrisch zur Geraden $\frac{1}{2}$ gelegenen ϱ. Das ist aber eben nach Satz 7 nicht möglich. Der Satz 8 ist damit bewiesen.

4. Satz. 9. *$N_Q(T)$ bezeichne die Anzahl der nichtreellen Nullstellen von $\zeta_Q(s)$ im Gebiet $-1 \leqq \sigma \leqq 2$, $|t| \leqq T$. Dann ist*

$$N_Q(T) = \frac{T}{\pi} \log \frac{D}{4\pi^2} + \frac{2T}{\pi} \log T - \frac{2T}{\pi} + \Theta_Q(T),$$

Für $\Theta_Q(T)$ gilt die Ungleichung

$$|\Theta_Q(T)| < c_{24} \log T + c_{25} \log D$$

und sogar $|\Theta_Q(T)| < \dfrac{c_{26} \log T}{\log \log T}$, wenn $T < D^{c_2}$ ist.

Beweis. Wir gehen in der gleichen Weise vor, wie zum Beweis der entsprechenden Formel für $\zeta(s)$. Nach (7) ist die Funktion $\left(\frac{D}{4}\right)^{\frac{1}{2}s} \pi^{-s}\,\Gamma(s)\,\zeta_Q(s)$ auf der Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$ reellwertig. Daraus folgt, daß $2\pi N_Q(T) = T \log\left(\frac{D}{4\pi^2}\right) + \int\limits_C d\,\arg \zeta_Q(s) + \int\limits_C d \arg\, \Gamma(s)$ ist, wo C den von $\frac{1}{2} - iT$ geradlinig nach $2 - iT$, von da geradlinig nach $2 + iT$, schließlich geradlinig nach $\frac{1}{2} + iT$ führenden Weg bedeutet. Vorausgesetzt ist dabei, daß auf C selbst keine Nullstellen liegen. Wir wollen annehmen, daß $\zeta_Q(s)$ positiven Realteil hat auf der Geraden $\sigma = 2$. Das ist nach Satz 1 möglich. Da nämlich der Realteil von $\zeta(2s)$ größer als $1 - \sum\limits_{n=2}^{\infty} n^{-4} > 0$ ist, andererseits der Absolutwert von $\zeta_Q(s) - \zeta(2s)$ für hinreichend großes D kleiner ist als $1 - \sum\limits_{n=2}^{\infty} n^{-4}$, so ist $\mathbf{R}\,\zeta_Q(s) \geqq 0$. Aus dieser Voraussetzung folgt $\int\limits_{2-iT}^{2+iT} d \arg \zeta_Q(s) \leqq \pi$. Es handelt sich nur noch um die Abschätzung von $\int\limits_{2+iT}^{\frac{1}{2}+iT} d \arg\, \zeta_Q(s)$. Wir gehen dabei vor wie Bäcklund[4]) bei der Riemannschen Zetafunktion. Die Nullstellen von $\mathbf{R}\,\zeta_Q(s)$ auf der Strecke $t = T$, $\frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq 2$ mögen diese Strecke in q Intervalle teilen. Da in jedem dieser Intervalle $\mathbf{R}\,\zeta_Q(s)$ von einerlei Vorzeichen ist, so ist das Integral von $d \arg\, \zeta_Q(s)$ längs einer solchen Strecke nicht größer als π. Demnach ist $\left| \int\limits_C d \arg\, \zeta_Q(s) \right| \leqq \pi(2q + 1)$. Es muß also nach einer Abschätzung für q gesucht werden. q ist die Anzahl der Nullstellen der Funktion $\zeta_Q(z + iT) + \zeta_Q(z - iT)$ auf der Strecke $\mathbf{I}(z) = 0$, $\frac{1}{2} \leqq \mathbf{R}(z) \leqq 2$. q ist demnach höchstens gleich der Anzahl q^* der Nullstellen

[4]) Bäcklund, Über die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion, Acta Math. **41** (1918), S. 345—375.

von $\zeta_Q(z-iT)+\zeta_Q(z-iT)$ in der Kreisscheibe $|z-2|\leqq\frac{3}{2}$. q^* können wir mit Hilfe der Jensenschen Formel abschätzen.

Sind $a_1,\ldots,a_{q_r^*}$ die Nullstellen von $F(z)=\zeta_Q(z+iT)+\zeta_Q(z-iT)$ in $|z-2|\leqq r$, so ist nach der Jensenschen Formel

$$2\pi\sum_{\nu=1}^{q_r^*}\log\frac{r}{|a_\nu|}=\int_0^{2\pi}\log\left|\frac{F(re^{i\varphi})}{F(0)}\right|d\varphi.$$

Nun kann r zwischen $\frac{7}{4}$ und 2 so gewählt werden, daß der Kreis $|z-2|=r$ durch keine Nullstelle von $F(z)$ geht. Dann ist also

$$6q^*<2\pi q_r^*\log\tfrac{21}{8}<\int_0^{2\pi}(\log|F(re^{i\varphi})|-\log|F(0)|)\,d\varphi.$$

Nach Satz 3 ist

$$|\log|F(re^{i\varphi})|-\log|F(0)||<c_{27}\log t+\tfrac{1}{2}\log D,$$

so daß

$$\left|\int_C d\arg\zeta_Q(s)\right|<c_{24}\log t+c_{25}\log D$$

gilt. Hieraus folgt die Behauptung des Satzes 9 für beliebiges T, wenn man noch $\int_C d\arg\Gamma(s)=2T\log T-2T+O(1)$ berücksichtigt.

Um den zweiten Teil von Satz 9, der sich auf $T<D^{c_2}$ bezieht, zu beweisen, wenden wir die Methode nicht auf $\zeta_Q(s)$, sondern auf $\Phi_D(s)$ an, was nach Satz 6 keinen Unterschied macht. Wenn wir bedenken, daß beim Beweis von Satz 4 statt $\Phi_D(s)\neq 0$ für $\sigma>\frac{1}{2}$, $|t|<D^{c_3}$ sogar $\mathbf{R}(1+f(s))>0$ gezeigt wurde, so sehen wir, daß in der Restabschätzung $\int_C d\arg\Phi_D(s)$ bis auf einen Fehler $<\pi$ durch $\int_C d\arg\zeta(2s)$ ersetzt werden darf. Wie oben sehen wir ein, daß nur das Integral $\int_{2+iT}^{\frac{1}{2}+iT} d\arg\zeta(2s)$ eine Rolle spielt. Wir wenden wieder die Jensensche Formel an. Sei $F(z)=\zeta(2z+2iT)+\zeta(2z-2iT)$. Dann ist

$$\left|\int_C d\arg\zeta(2s)\right|<\pi(2q+1),$$

wenn q die Anzahl der Nullstellen von $F(z)$ im Kreis $|z-2|\leqq\frac{3}{2}$ ist. Wier wenden die Jensensche Formel auf den Kreis um 2 mit dem Radius $\frac{3}{2}(1+\varepsilon)$ an. Sind a_ν die q Nullstellen von $F(z)$ in $|z-2|\leqq\frac{3}{2}$, so gilt also

$$(26)\qquad 2\pi\sum_{\nu=1}^{q}(\log\tfrac{3}{2}(1+\varepsilon)-\log|a_\nu|)\leqq\int_0^{2\pi}\log\left|\frac{F(\frac{3}{2}(1+\varepsilon)\,e^{i\varphi})}{F(0)}\right|d\varphi.$$

Wegen $|a_\nu|\leqq\frac{3}{2}$ folgt hieraus

$$2\pi q\log(1+\varepsilon)\leqq\int_0^{2\pi}(\log|F(\tfrac{3}{2}(1+\varepsilon)\,e^{i\varphi})|-\log|F(0)|)\,d\varphi.$$

Wenn $\varepsilon\leqq\frac{1}{192}$ also $2-3\varepsilon\geqq\frac{6}{6}\frac{3}{4}$ ist, so kann der Betrag von $\zeta(2s)$ mit Hilfe eines Satzes von Hardy und Littlewood [5]) abgeschätzt werden:

$$\zeta(s)=O\frac{t^{-\frac{4(1-\sigma)}{\log 1-\sigma}}\log t}{\log\log t}$$

gleichmäßig für $\frac{3}{4}\frac{6}{6}\leqq\sigma$.

[5]) Hardy und Littlewood, Some problems of Diophantine approximation, Internat. Congress of Math. Cambridge 1912, 1, S. 223—229; Titchmarsh 1.62, theorem 12, S. 22.

Wir erhalten auf diese Weise

$$2\pi q \log(1+\varepsilon) < c_{28}\left(\frac{12\,\varepsilon \log T}{\log\frac{1}{3\varepsilon}} + \log\log T\right),$$

$$q < c_{28}\left(\frac{12\,\varepsilon \log T}{\log\frac{1}{3\varepsilon}} + \log\log T\right).$$

Wird nun $3\varepsilon = \frac{(\log\log T)^2}{\log T}$ gesetzt, so folgt

$$q < c_{29}\frac{\log T}{\log\log T},$$

$$\left|\int_C d\arg\zeta(2s)\right| < c_{20}\frac{\log T}{\log\log T}.$$

Damit ist auch die zweite Behauptung von Satz 9 bewiesen.

Man erhält eine noch bessere Abschätzung für $\int_C d\arg\zeta(2s)$, wenn man die Richtigkeit der Riemannschen Vermutung für $\zeta(s)$ voraussetzt, weil dann eine bessere Abschätzung für $\zeta(s)$ im kritischen Streifen zur Verfügung steht. Nach Littlewood [6]) ist

$$\log\zeta(s) = O((\log t)^{2(1-\sigma)+\delta})$$

gleichmäßig für $\sigma \geqq \sigma_0 > \frac{1}{2}$ bei festem, sonst beliebigem positiven δ.

Wie oben folgern wir aus (26)

$$q < c_{30}\frac{(\log T)^{6\varepsilon+\delta}}{\log(1+\varepsilon)}.$$

Setzen wir hierin $\varepsilon = \frac{1}{6}\log\log T$, so erhalten wir

$$q < c_{31}(\log T)^{\delta}.$$

Daher gilt unter Annahme der Riemannschen Vermutung

$$\left|\int_C d\arg\zeta(2s)\right| < c_{32}(\log T)^{\delta} \text{ für jedes } \delta > 0.$$

Wir wollen die Formel für $N_Q(T)$ im Falle $T < D^{c_2}$ noch auf einem zweiten Wege beweisen, durch den sie in neues Licht gesetzt wird. Wir können wieder $\Phi_D(s)$ an Stelle von $\zeta_Q(s)$ betrachten. Da wir wissen, daß $\Phi_D(s)$ im Bereiche $T < D^{c_2}$ nur komplexe Nullstellen mit dem Realteil $\frac{1}{2}$ hat, so können wir einfach die reellen Nullstellen von

$$1 + f(s) = 1 + e^{i\varphi(t)} = 1 + e^{-it\log\frac{D}{4\pi^2} + \log\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-it)}{\Gamma(\frac{1}{2}+it)} + \log\frac{\zeta(1-2it)}{\zeta(1+2it)}}$$

in $|t| \leqq T$ abzählen. Da $\varphi'(t) < 0$ ist (vgl. den Beweis von Satz 6), so ist die Anzahl der Nullstellen von $1 + f(s)$, die wegen des Poles von $\zeta(2s)$ um 1 größer als die Anzahl $N_Q(T)$ ist, gleich

$$\theta' + N_Q(T) + 1 = \frac{1}{2\pi}\left\{2T\log\frac{D}{4\pi^2} + \int_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{1}{2}+iT} d\arg\Gamma(s) + \int_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{1}{2}+iT} d\arg\Gamma(1-s) + \int_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{1}{2}+iT} d\arg\frac{\zeta(2-2s)}{\zeta(2s)}\right\},$$

$$|\theta'| < 1.$$

Die Integrale sind geradlinig zu erstrecken. Rechts steht nichts anderes als die Anzahl der Lösungen der Kongruenz $\varphi(t) \equiv \pi \pmod{2\pi}$ im Intervall $-T \leqq t \leqq T$. Die beiden

---

[6]) Littlewood, Quelques conséquences de l'hypothèse que la fonction $\zeta(s)$ de Riemann n'a pas de zéros dans le demi-plan $R(s) > \frac{1}{2}$, Comptes Rendus **154** (1912), S. 263—266; Titchmarsh 5.12, theorem 53, S. 77.

ersten Integrale können wir sofort ausrechnen, sie sind beide gleich $2T \log T - 2T + O(1)$. Das dritte Integral schreiben wir zunächst in der Form

$$-\int_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{1}{2}+iT} d \arg \left(\zeta(2-2s)\,(1-2s)\right) + \int_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{1}{2}+iT} d \arg \left(\zeta(2s)\,(2s-1)\right),$$

um zu erkennen, daß wir an seiner Stelle auch

$$2 \int_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{1}{2}+iT} d \arg \left(\zeta(2s)\,(2s-1)\right)$$

schreiben dürfen. Dies Integral können wir wieder über den Weg C erstrecken. Dann können wir die beiden Faktoren $\zeta(2s)$ und $2s-1$ trennen, und da

$$\int_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{1}{2}+iT} d \arg (2s-1) = \pi$$

ist, so erhalten wir

$$\theta' + N_Q(T) = \frac{1}{2\pi}\left(2T \log \frac{D}{4\pi^2} + \int_C d \arg \Gamma(s) + \int_C d \arg \Gamma(1-s) + 2 \int_C d \arg \zeta(2s)\right),$$
$$|\theta'| < 1.$$

Das ist genau der gleiche Ausdruck für $N_Q(T)$, den wir oben gefunden hatten.

Bemerkenswert ist der Vergleich der Abschätzungsformel für das Restglied in der Formel für $N_Q(T)$ mit den entsprechenden Formeln für die Riemannsche Zetafunktion. Die für jedes T gültige Abschätzung $\left|\int_C d \arg \zeta_Q(s)\right| < c_{24} \log T + c_{25} \log D$ entspricht durchaus der Abschätzung $\left|\int_C d \arg \zeta(s)\right| < c \log T$; $\int_C d \arg \zeta(s)$ ist der wesentliche Restbestandteil in der Riemann-v.Mangoldtschen Formel für die Anzahl der Nullstellen von $\zeta(s)$. Unter Annahme der Riemannschen Vermutung läßt sich $\int_C d \arg \zeta(s) = O\left(\frac{\log T}{\log \log T}\right)$ beweisen; dies paßt mit der Abschätzung

$$\left|\int_C d \arg \zeta_Q(s)\right| < c_{26} \frac{\log T}{\log \log T} \text{ für } T < D^{c_{27}}$$

gut zusammen. Die Tatsache des Nichtverschwindens von $\zeta_Q(s)$ für $\sigma > \frac{1}{2}$, $T < D^{c_{27}}$ ist allerdings in der schärferen Form $\mathbf{R} \frac{\zeta_Q(s)}{\zeta(2s)} > 0$ benutzt worden. Das unter Annahme der Riemannschen Vermutung erhaltene Ergebnis $\int_C d \arg \zeta(2s) = O((\log T)^\delta)$ scheint jedoch darauf hinzudeuten, daß $\zeta_Q(s)$ für gegen D kleine t eine Abweichung vom „normalen" Verhalten zeigt; dabei denken wir an die untere Abschätzung $\Omega((\log T)^{\frac{1}{2}-\delta})$ für das Restglied in der Riemann-v. Mangoldtschen Formel, die eine Folgerung aus der Riemannschen Vermutung ist [7]).

[7]) Vgl. Landau, Zur Theorie der Riemannschen Zetafunktion, Vierteljahrsschr. Naturf. Ges. Zürich **56** (1911), S. 125—148; Littlewood, On the Riemann zeta-function, Proc. London Math. Soc. (2) **24** (1925); Titchmarsh 5.62, theorem 61, S. 88.

Eingegangen 13. Oktober 1934.

(1).

nn

ler
on.
ht

he

ler
ch

st

ne

nt

r-

ir
er

1),
2,